А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонский
Е.М. Рабинович
М.С. Якир

Сборник

задач и контрольных работ по геометрии для 9 класса

«Схвалено Міністерством освіти і науки України для використання у загальноосвітніх навчальних закладах»

Харьков
«Гимназия»
2010

УДК 373:512
ББК 22.151.я721
М52

*«Схвалено Міністерством освіти і науки України
для використання у загальноосвітніх навчальних закладах»*
(Письмо № 1/11-4351 от 19.06.2009 г.)

Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С.
М52 Сборник задач и контрольных работ по геометрии для 9 класса. — Х.: Гимназия, 2010. — 120 с.: илл.
ISBN 978-966-474-058-3.

Пособие представляет собой дидактический материал по геометрии для 9 класса общеобразовательных учебных заведений. Оно содержит более 1100 задач. Первая часть «Тренировочные упражнения» разделена на три однотипных варианта по 377 задач в каждом. Вторая часть содержит контрольные работы (два варианта) для тематического оценивания учебных достижений учащихся по 12-балльной шкале в соответствии с действующей государственной программой по математике.

Для учителей общеобразовательных учебных заведений и учащихся 9 классов.

УДК 373:512
ББК 22.151.я721

ISBN 978-966-474-058-3

ОТ АВТОРОВ

Ученикам

Дорогие дети! В этом году вы продолжите захватывающее путешествие по волшебной стране Геометрия. Мы уверены, что преодоление трудностей, которые встретятся на вашем пути, не только поможет вам окрепнуть, но и принесет радость от достигнутых побед.

Учителю

Мы очень надеемся, что, приобретя эту книгу не только для себя, а и «на класс», Вы не пожалеете. Даже если Вам повезло и Вы работаете по учебнику, который нравится, все равно задач, как и денег, бывает мало или совсем мало. Мы надеемся, что это пособие поможет ликвидировать «задачный дефицит».

Первая часть — «Тренировочные упражнения» — разделена на три однотипных варианта по 377 задач в каждом. Ко многим (наиболее сложным) задачам первого и второго вариантов приведены ответы и указания к решению. Отсутствие ответов к заданиям третьего варианта, на наш взгляд, расширяет возможности учителя при составлении самостоятельных и проверочных работ. На стр. 4 приведена таблица тематического распределения тренировочных упражнений.

Вторая часть пособия содержит 6 контрольных работ (два варианта). Содержание заданий для контрольных работ разделим условно на две части. Первая соответствует начальному и среднему уровням учебных достижений учащихся. Задания этой части обозначены символом n° (n — номер задания). Вторая часть соответствует достаточному и высокому уровням. Задания каждого из этих уровней обозначены символами $n^{\bullet}$ и $n^{\bullet\bullet}$ соответственно. Выполнение первой части максимально оценивается в 6 баллов. Правильно решенные задачи уровня $n^{\bullet}$ добавляют еще 4 балла, то есть ученик может получить отличную оценку 10 баллов. Если ученику удалось еще решить задачу $n^{\bullet\bullet}$, то он получает оценку 12 баллов.

Желаем вам творческого энтузиазма и терпения...

Тематическое распределение тренировочных упражнений

Тема	Номера упражнений
Синус, косинус и тангенс угла от 0° до 180°	1 – 4
Теорема косинусов	5 – 25
Теорема синусов	26 – 48
Решение треугольников	49 – 53
Формулы для нахождения площади треугольника	54 – 75
Правильные многоугольники и их свойства	76 – 113
Длина окружности	114 – 131
Площадь круга	132 – 156
Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Координаты середины отрезка	157 – 171
Уравнение окружности	172 – 180
Уравнение прямой	181 – 187
Угловой коэффициент прямой	188 – 193
Понятие вектора	194 – 197
Координаты вектора	198 – 207
Сложение и вычитание векторов	208 – 221
Умножение вектора на число	222 – 242
Скалярное произведение векторов	243 – 264
Параллельный перенос	265 – 274
Осевая симметрия	275 – 292
Центральная симметрия	293– 311
Поворот	312 – 323
Гомотетия. Подобие фигур	324 – 341
Прямые и плоскости в пространстве	342 – 353
Прямая призма	354 – 360
Пирамида	361 – 367
Цилиндр	368 – 370
Конус	371 – 374
Шар	375 – 377

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Вариант 1

Синус, косинус и тангенс угла от 0° до 180°

1. Чему равен:

1) $\sin(180° - \alpha)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$;

2) $\cos(180° - \alpha)$, если $\cos\alpha = -0{,}1$;

3) $\mathrm{tg}(180° - \alpha)$, если $\mathrm{tg}\alpha = 8$?

2. Найдите значение выражения:

1) $3\sin 0° + 4\cos 180°$;

2) $5\sin 90° - 7\cos 0°$;

3) $\cos^2 110° + \sin^2 110°$;

4) $\sin 120° \cos 150° \,\mathrm{tg}\, 135°$;

5) $\cos^2 40° + \sin^2 140°$;

6) $\frac{\mathrm{tg}\, 72°}{\mathrm{tg}\, 108°}$.

3. Сравните с нулем значение выражения:

1) $\sin 115° \cos 160°$;

2) $\sin 52° \cos 90° \,\mathrm{tg}\, 106°$.

4. Найдите:

1) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$;

2) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ и $0° \le \alpha \le 90°$;

3) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{9}$.

Теорема косинусов

5. Найдите сторону AC треугольника ABC, если:

1) $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $\angle B = 60°$;

2) $AB = 5\sqrt{2}$ см, $BC = 4$ см, $\angle B = 135°$.

6. Найдите косинусы углов треугольника, стороны которого равны 5 см, 8 см и 11 см.

7. Две стороны треугольника равны 6 см и 9 см, а синус угла между ними равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?

8. Определите вид треугольника, стороны которого равны:

1) 3 см, 4 см, 6 см; 2) 5 см, 6 см, 7 см; 3) 8 см, 15 см, 17 см.

9. Стороны параллелограмма равны 8 см и 10 см, а угол между ними — 60°. Найдите диагонали параллелограмма.

10. На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) отмечены точки D и E соответственно. Найдите длину отрезка DE, если $AC = 4$ см, $BC = 2\sqrt{5}$ см, $CE = 1$ см, $BD = 2$ см.
11. Катет AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равен 2 см. На продолжении гипотенузы AB за точку B отметили такую точку D, что $BD = BC$. Найдите CD.
12. Одна сторона треугольника на 5 см больше второй, а угол между ними равен 60°. Найдите периметр треугольника, если его третья сторона равна 7 см.
13. Две стороны треугольника относятся как 5 : 3, а угол между ними равен 120°. Найдите эти стороны, если периметр треугольника равен 15 см.
14. Две стороны треугольника равны 8 см и 7 см, а угол против меньшей из них — 60°. Найдите третью сторону треугольника.
15. Основание равнобедренного треугольника равно a, а угол при основании — α. Найдите медиану треугольника, проведенную к его боковой стороне.
16. Стороны четырехугольника, взятые последовательно, равны a, b, c и d. Найдите косинус угла между сторонами b и c, если около четырехугольника можно описать окружность.
17. Для сторон треугольника выполняется равенство $a^2 = b^2 + c^2 + bc$. Докажите, что угол, противолежащий стороне a, равен 120°.
18. Стороны треугольника равны 20 см и 12 см, а угол между ними — 120°. Найдите медиану треугольника, проведенную к его третьей стороне.
19. Найдите диагонали параллелограмма, если они относятся как 6 : 7, а стороны параллелограмма равны 14 см и 22 см.
20. Одна из сторон параллелограмма на 5 см больше другой, а диагонали параллелограмма равны 17 см и 19 см. Найдите стороны параллелограмма.
21. Стороны треугольника равны 8 см, 9 см и 13 см. Найдите медиану треугольника, проведенную к его наибольшей стороне.
22. В треугольнике ABC $AB = 7$ см, $BC = 9$ см, BM — медиана. Найдите сторону AC, если $BM : AC = 2 : 7$.
23. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 8 см, а медиана, проведенная к ней, — 6 см. Найдите основание треугольника.

24. Медианы AM_1 и BM_2 треугольника ABC равны соответственно 12 см и 15 см, а угол AMB равен 60° (M — точка пересечения медиан). Найдите третью медиану треугольника.

25. Докажите, что в любом выпуклом четырехугольнике сумма квадратов диагоналей в два раза больше суммы квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника.

Теорема синусов

26. В треугольнике ABC $BC = 5\sqrt{3}$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$. Найдите сторону AC.

27. В треугольнике ABC $AB = 3\sqrt{2}$ см, $\angle A = 15°$, $\angle C = 135°$. Найдите сторону AC.

28. В треугольнике ABC $AC = 6$ см, $AB = 3\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$. Найдите угол C.

29. В треугольнике ABC $AB = 8$ см, $BC = 4\sqrt{6}$ см, $\angle C = 45°$. Найдите угол A. Сколько решений имеет задача?

30. В треугольнике ABC $AB = 13$ см, $BC = 8$ см. Может ли $\sin A$ быть равным $\frac{2}{3}$?

31. В треугольнике ABC $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Найдите стороны AC и AB.

32. На рисунке 1 $AB = c$, $\angle B = 90°$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAD = \beta$, $\angle D = \gamma$. Найдите AD.

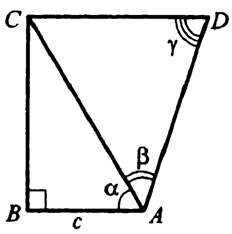


Рис. 1

33. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а острый угол равен α. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины его прямого угла.

34. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна d и делит угол A на углы α и β. Найдите стороны и вторую диагональ параллелограмма.

35. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен α, а биссектриса угла при основании равна l. Найдите периметр треугольника.

36. Два угла треугольника равны α и β, а биссектриса, проведенная из вершины третьего угла, равна l. Найдите стороны треугольника.

37. На рисунке 2 $AC = b$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle BDA = \beta$, $\angle BAD = \gamma$. Найдите CD.

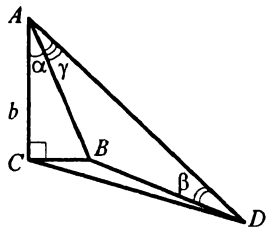


Рис. 2

38. Разность сторон AB и BC треугольника ABC равна 4 см, $\angle C = 60°$, $\angle A = 45°$. Найдите стороны AB и BC треугольника ABC.

39. Отрезок CM — медиана треугольника ABC. Докажите, что:

$$AC : BC = \sin\angle MCB : \sin\angle MCA.$$

40. Найдите стороны треугольника, периметр которого равен P, а два угла — α и β.

41. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $\angle C = 30°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

42. Две стороны треугольника равны $3\sqrt{2}$ см и 4 см. Найдите третью сторону треугольника, если она относится к радиусу описанной окружности как $\sqrt{2} : 1$. Сколько решений имеет задача?

43. В треугольнике ABC $\angle A = 54°$, $\angle B = 66°$, отрезок AK — высота треугольника. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABK, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 6 см.

44. В треугольнике ABC H — точка пересечения высот. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если радиус окружности, описанной около треугольника AHB, равен R.

45. Основание равнобедренного треугольника равно 24 см, а боковая сторона — 13 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

46. Основания равнобокой трапеции равны 24 см и 8 см, а боковая сторона — 12 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

47. В окружность, радиус которой равен 4 см, вписана трапеция, одно из оснований которой в 2 раза больше каждой из остальных сторон. Найдите диагонали трапеции.

48. В треугольнике ABC O — точка пересечения биссектрис, $\angle AOC = 120°$. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и AOC, равны.

Решение треугольников

49. Найдите неизвестные стороны и углы треугольника ABC, если:

1) $AC = 8$ см, $\angle B = 48°$, $\angle C = 56°$;
2) $AB = 12$ см, $\angle A = 17°$, $\angle B = 54°$;
3) $AB = 9$ см, $BC = 6$ см, $\angle B = 70°$;
4) $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 110°$;
5) $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см;
6) $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см;
7) $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $\angle A = 100°$;
8) $AB = 8$ см, $BC = 9$ см, $\angle A = 40°$;
9) $AB = 6$ см, $BC = 5$ см, $\angle A = 20°$;
10) $AB = 6$ см, $BC = 3$ см, $\angle A = 40°$.

50. В треугольнике ABC $AB = BC = 6$ см, $\angle B = 40°$. Найдите: 1) сторону AC; 2) высоту AD; 3) медиану AM; 4) биссектрису BK; 5) радиус описанной окружности; 6) радиус вписанной окружности.

51. Диагональ BD равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 4 см, $\angle CDB = 36°$, $\angle BDA = 48°$. Найдите: 1) стороны трапеции; 2) радиус окружности, описанной около треугольника BCD; 3) радиус окружности, вписанной в треугольник AOD (O — точка пересечения диагоналей трапеции).

52. Большая сторона треугольника, вписанного в окружность, равна 6 см, а вершины треугольника делят окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как 1 : 4 : 7. Найдите неизвестные стороны треугольника.

53. На сторонах треугольника ABC ($AB = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$) во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники и их вершины последовательно соединены. Определите периметр полученного треугольника.

Формулы для нахождения площади треугольника

54. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 4 см и 7 см, а угол между ними равен: 1) 30°; 2) 120°.

55. Две стороны треугольника равны 4 см и 8 см. Может ли его площадь быть равной: 1) 12 см^2; 2) 16 см^2; 3) 18 см^2?

56. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 30°, а его площадь — 150 см^2. Найдите боковую сторону треугольника.

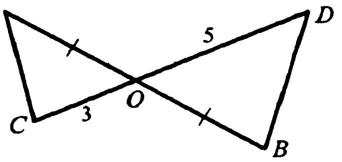


Рис. 3

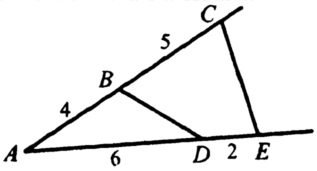


Рис. 4

57. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 3), $AO = OB$, $CO = 3$ см, $OD = 5$ см. Найдите отношение площадей треугольников AOC и DOB.

58. На сторонах угла A отложены отрезки $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AD = 6$ см, $DE = 2$ см (рис. 4). Найдите отношение площадей треугольника ABD и четырехугольника $BCED$.

59. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 26 см, 28 см и 30 см.

60. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки длиной 5 см и 6 см. Найдите площадь треугольника, если меньшая из двух других сторон равна 15 см.

61. Найдите наименьшую высоту треугольника, стороны которого равны 7 см, 8 см и 9 см.

62. Три окружности, радиусы которых равны 12 см, 14 см и 16 см, попарно касаются друг друга. Определите площадь треугольника, вершинами которого являются центры этих окружностей.

63. В треугольник со сторонами 26 см, 15 см и 37 см вписана окружность, центр которой соединен с вершинами треугольника. Найдите площади полученных трех треугольников.

64. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 9 см и 12 см, а угол между ними — 60°.

65. Найдите площадь ромба, сторона которого равна $5\sqrt{3}$ см, а один из углов — 120°.

66. Среди всех ромбов с данной стороной a укажите ромб, имеющий наибольшую площадь. Найдите эту площадь.

67. Углы ромба относятся как 1 : 3, а его сторона равна 8 см. Найдите площадь ромба.

68. Прямоугольник и параллелограмм имеют соответственно равные стороны, а отношение их площадей равно $\sqrt{2}$. Найдите углы параллелограмма.

69. Стороны параллелограмма равны 6 см и 8 см. Может ли его площадь быть равной 49 см^2?

70. Высоты параллелограмма равны 8 см и 10 см, а угол между ними — 60°. Найдите площадь параллелограмма.

71. Площадь прямоугольника равна $12\sqrt{3}$ см^2, а угол между его диагоналями — 60°. Найдите стороны прямоугольника.

72. Диагонали четырехугольника равны 4 см и 8 см, а угол между ними — 30°. Найдите площадь четырехугольника.

73. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника равен 4 см. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены квадраты и их вершины последовательно соединены. Найдите площадь образовавшегося шестиугольника.

74. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Площади треугольников AMB, BMC и CMD соответственно равны 6 см^2, 4 см^2 и 8 см^2. Найдите площадь треугольника AMD.

75. В окружность вписан четырехугольник, стороны которого последовательно равны 3 см, 5 см, 8 см, 10 см. Найдите площадь четырехугольника.

Правильные многоугольники и их свойства

76. Существует ли пятиугольник, все углы которого равны и который не является правильным?

77. Найдите углы правильного n-угольника, если n равно: 1) 5; 2) 9; 3) 12.

78. Найдите количество сторон правильного многоугольника, если: 1) его угол равен 168°; 2) его внешний угол равен 18°.

79. Определите количество сторон правильного многоугольника, внешний угол которого составляет $\frac{2}{3}$ угла многоугольника.

80. Сумма внешних углов правильного многоугольника вместе с одним из углов многоугольника составляет 532°. Найдите количество сторон многоугольника.

81. На рисунке 5 изображен правильный шестиугольник $ABCDEF$, K — точка пересечения продолжений сторон DE и AF. Найдите угол AKD.

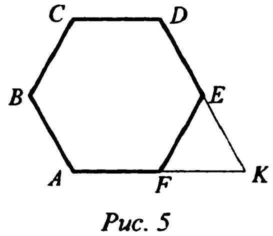


Рис. 5

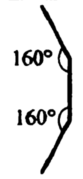


Рис. 6

82. На рисунке 6 изображено несколько последовательных сторон правильного многоугольника. Сколько сторон имеет этот многоугольник?

83. Найдите центральный угол правильного n-угольника, если n равно: 1) 3; 2) 9; 3) 15.

84. Центральный угол правильного многоугольника равен 15°. Найдите количество сторон многоугольника.

85. Какой наибольший центральный угол может иметь правильный многоугольник?

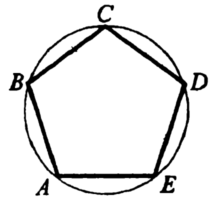


Рис. 7

86. На рисунке 7 изображен правильный пятиугольник, вписанный в окружность. Как проще всего на этом рисунке построить правильный десятиугольник, вписанный в эту окружность?

87. По данной стороне a постройте правильный восьмиугольник.

88. Опишите около данной окружности правильный шестиугольник.

89. Отрезки AB, BC и CD — три последовательные стороны правильного многоугольника с центром O. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что около четырехугольника $MAOC$ можно описать окружность.

90. В окружность вписан многоугольник, все углы которого равны. Могут ли быть неравными его стороны?

91. Докажите, что если последовательно соединить середины сторон правильного многоугольника, то полученной фигурой будет правильный многоугольник с тем же количеством сторон.

92. Сторона правильного треугольника равна 4 см. Найдите радиусы его вписанной и описанной окружностей.

93. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $5\sqrt{2}$ см. Найдите сторону квадрата и радиус вписанной в него окружности.

94. Радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен $4\sqrt{3}$ см. Найдите сторону шестиугольника и радиус описанной около него окружности.

95. Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен 8 см, а радиус окружности, вписанной в него, — $4\sqrt{3}$ см. Найдите сторону многоугольника и количество его сторон.

96. Существует ли правильный многоугольник, у которого отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно 0,6?

97. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна $\sqrt{6}$ см. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

98. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей правильного треугольника, если их разность равна 8 см.

99. Один правильный шестиугольник вписан в окружность, а другой — описан около нее. Найдите отношение сторон этих шестиугольников.

100. В окружность радиуса R вписан правильный треугольник. В этот треугольник вписана окружность, а в окружность — квадрат. Найдите сторону квадрата.

101. Около квадрата со стороной 6 см описана окружность, а около окружности описан правильный шестиугольник, около которого описана окружность. Найдите радиус этой окружности.

102. В окружность радиуса $\sqrt{3}$ см вписан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен другой правильный треугольник и в него вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

103. Середины сторон правильного двенадцатиугольника соединены через одну так, что полученной фигурой является правильный шестиугольник. Найдите сторону образовавшегося шестиугольника, если сторона двенадцатиугольника равна 2 см.

104. Сторона правильного восьмиугольника $ABCDEFKP$ равна 6 см. Найдите длины диагоналей AC, AD и AE.

105. Общая хорда двух пересекающихся окружностей служит для одной из окружностей стороной правильного вписанного треугольника, а для другой — стороной вписанного квадрата. Найдите расстояние между центрами окружностей, если они лежат по разные стороны от хорды, а длина хорды равна 6 см.

106. В правильный треугольник со стороной a вписана окружность. Три маленькие окружности касаются этой окружности и двух сторон треугольника. Найдите радиусы маленьких окружностей.

107. Углы правильного треугольника срезали так, что получили правильный шестиугольник. Найдите сторону шестиугольника, если сторона треугольника равна a.

108. Около правильного четырехугольника со стороной a описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин четырехугольника является величиной постоянной. Найдите ее.

109. Выразите площадь правильного шестиугольника через длину его большей диагонали.

110. Вычислите площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 4 см.

111. Найдите отношение площадей правильных треугольника, четырехугольника и шестиугольника, стороны которых равны.

112. Углы квадрата со стороной 1 см срезали так, что получили правильный восьмиугольник. Найдите площадь восьмиугольника.

113. Сторона правильного треугольника равна 4 см. В треугольник вписана окружность, а в окружность — правильный шестиугольник. Найдите площадь шестиугольника.

Длина окружности

114. Найдите длину окружности, радиус которой равен: 1) 1 см; 2) 4 см; 3) π см; 4) $\frac{6}{\pi}$ см.

115. Найдите длину окружности, диаметр которой на 8 см больше радиуса.

116. Чему равен радиус окружности, длина которой равна: 1) 2 см; 2) 5 см; 3) π см; 4) $4\pi^2$ см?

117. Как построить окружность, длина которой равна сумме длин трех данных окружностей?

118. Радиус окружности увеличили: 1) в 2 раза; 2) на 2 см. Как при этом изменилась длина окружности?

119. На диаметре AB окружности взяли произвольную точку M и на отрезках AM и MB как на диаметрах построили окружности. Сравните длину окружности, построенной на диаметре AB, с суммой длин окружностей, построенных на отрезках AM и MB.

120. Груз поднимают с помощью блока (рис. 8). На сколько поднимется груз за шесть оборотов блока, если радиус блока равен 6 см?

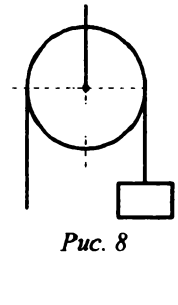


Рис. 8

121. Диаметр ведущего колеса электровоза равен 2 м. Найдите скорость электровоза, если ведущее колесо за одну минуту делает 100 оборотов. Ответ в километрах в час округлите до единиц.

122. Постройте график зависимости длины окружности от ее радиуса.

123. Радиус окружности равен 6 см. Найдите длину дуги, содержащей: 1) 1°; 2) 15°; 3) 120°; 4) 270°; 5) 330°.

124. Длина дуги окружности равна 15 см, а ее градусная мера — 18°. Найдите радиус окружности.

125. Длина дуги окружности равна 2π см. Найдите градусную меру этой дуги, если радиус окружности равен 30 см.

126. Начертите окружность радиусом 6 см. Отложите на ней дугу длиной 4π см.

127. Длина окружности, радиус которой 10 см, равна длине дуги второй окружности, содержащей 150°. Найдите радиус второй окружности.

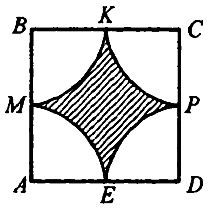


Рис. 9

128. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат со стороной a; KM, ME, EP и PK — дуги с центрами B, A, D и C соответственно и радиусами, равными $\frac{a}{2}$ (рис. 9). Найдите длину линии, ограничивающей заштрихованную фигуру.

129. На катете BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги этой окружности, которая расположена вне треугольника и отсекается гипотенузой AB, если $\angle B = 36°$, $BC = 6$ см.

130. В треугольнике ABC $AB = 8$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$. Проведена окружность с центром в вершине A, которая касается стороны BC. Найдите длину дуги этой окружности, расположенной внутри треугольника.

131. В окружность, радиус которой равен 1, вписан правильный двенадцатиугольник, а около окружности описан квадрат. Сделайте рисунок и, пользуясь им, докажите, что $3 < \pi < 4$.

Площадь круга

132. Найдите площадь круга, радиус которого равен: 1) 3 см; 2) π см; 3) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ см.

133. Найдите с точностью до десятых радиус круга, площадь которого равна 4 см^2.

134. Радиус круга уменьшили в 3 раза. Как при этом изменилась площадь круга?

135. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна 8π см.

136. Длины двух окружностей равны 8π см и 12π см. Чему равно отношение площадей соответствующих кругов?

137. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около правильного треугольника, если площадь треугольника равна $9\sqrt{3}$ см^2.

138. Найдите отношение площадей вписанного и описанного кругов правильного шестиугольника.

139. Найдите площадь кольца, расположенного между двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны 4 см и 6 см.

140. Найдите площадь сектора круга, радиус которого равен 5 см, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: 1) 20°; 2) 150°; 3) 240°.

141. Какую часть площади круга составляет площадь сектора, если соответствующий сектору центральный угол равен: 1) 40°; 2) 105°; 3) 330°?

142. Площадь сектора составляет $\frac{3}{8}$ площади круга. Найдите градусную меру центрального угла, соответствующего данному сектору.

143. Найдите радиус круга, если площадь сектора этого круга равна 8,5 см^2, а центральный угол, соответствующий этому сектору, равен 108°.

144. Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 10 см, а градусная мера дуги сегмента равна: 1) 30°; 2) 135°; 3) 210°.

145. Найдите площадь кругового сегмента, если его основание равно 4 см, а градусная мера дуги сегмента равна: 1) 45°; 2) 300°.

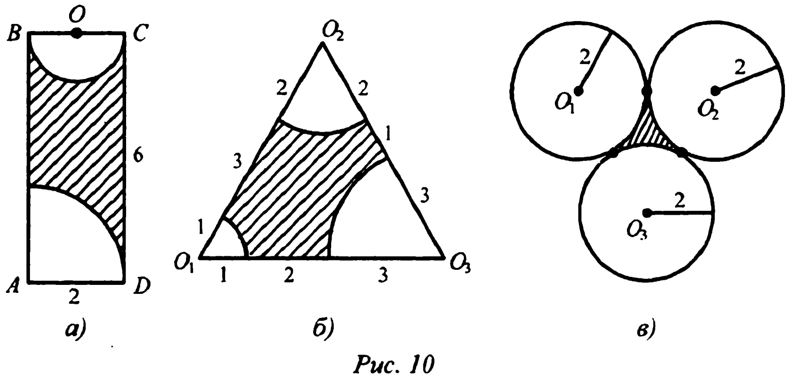


Рис. 10

146. Может ли сегмент круга быть одновременно и сектором?

147. Найдите площади заштрихованных фигур, изображенных на рисунке 10 (длины отрезков даны в сантиметрах).

148. Найдите площадь круга, вписанного в равнобедренный треугольник, основание которого равно 10 см, а боковая сторона — 13 см.

149. Острый угол ромба равен 30°, а площадь круга, вписанного в ромб, — 6π см^2. Найдите площадь ромба.

150. Два круга имеют общую хорду. Найдите отношение площадей этих кругов, если из центра первого круга общая хорда видна под углом 60°, а из центра второго — под углом 120°.

151. Найдите площадь кругового кольца, содержащегося между описанной и вписанной окружностями правильного треугольника со стороной 4 см.

152. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. В него вписан полукруг, центр которого лежит на большей стороне треугольника. Найдите площадь полукруга.

153. На стороне правильного треугольника, равной 6 см, построен полукруг, лежащий в той же полуплоскости, что и треугольник. Определите площадь части треугольника, находящейся вне полукруга.

154. Радиус круга равен 4 см. В нем проведена хорда, равная стороне правильного треугольника, вписанного в этот круг. Найдите площадь большего из сегментов, которые определяются этой хордой.

155. В круговой сектор, градусная мера дуги которого равна 60°, вписана окружность радиусом 3 см. Найдите площадь сектора.

156. Радиус круга равен 2 см. По разные стороны от центра круга проведены параллельные хорды, одна из которых равна стороне правильного вписанного четырехугольника, а другая — стороне правильного вписанного шестиугольника. Найдите площадь части круга, находящейся между хордами.

Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Координаты середины отрезка

157. Найдите расстояние между точками A и B, если:
1) $A(2; 4)$, $B(5; 8)$; 2) $A(-3; 1)$, $B(4; 1)$; 3) $A(5; -2)$, $B(-1; -3)$.

158. Докажите, что точки $A(-2; -3)$, $B(2; 1)$ и $C(7; 6)$ лежат на одной прямой. Какая из точек лежит между двумя другими?

159. Вершинами треугольника являются точки $A(-2; 1)$, $B(-1; 5)$, $C(-6; 2)$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

160. Расстояние между точками $A(5;-2)$ и $B(9;x)$ равно 5. Найдите x.

161. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек $A(3;-2)$ и $B(1;2)$.

162. Найдите координаты середины отрезка MN, если:

1) $M(4;3)$, $N(6;1)$;
2) $M(-3;-2)$, $N(-1;4)$;
3) $M(-4;-5)$, $N(-1;4)$.

163. Точка C — середина отрезка AB. Найдите координаты точки B, если $A(-3;8)$, $C(-5;4)$.

164. Найдите координаты точки, делящей отрезок AB в отношении 3 : 1, считая от точки A, если $A(3;-5)$, $B(-1;7)$.

165. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(3;-4)$, $B(-6;1)$, $C(-5;2)$, $D(4;-3)$ является параллелограммом.

166. Точки $C_1(2;-3)$ и $A_1(-4;1)$ — середины сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Вершина A имеет координаты (5; 6). Найдите координаты вершин B и C.

167. Точки $A(-3;1)$, $B(2;4)$ и $C(1;-3)$ — середины сторон некоторого треугольника. Найдите координаты его вершин.

168. В треугольнике ABC $A(3;-1)$, $B(-5;7)$, $C(1;5)$. Найдите длину средней линии KP треугольника ABC, где точки K и P — середины сторон AB и BC соответственно.

169. Найдите длину отрезка, концы которого лежат на осях координат, а его серединой является точка $M(-4;3)$.

170. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-2;1)$, $B(1;4)$, $C(5;0)$ и $D(2;-3)$ является прямоугольником.

171. Найдите координаты вершины A равностороннего треугольника ABC, если известны координаты вершин $B(-2;0)$ и $C(4;0)$.

Уравнение окружности

172. Определите по уравнению окружности координаты ее центра и радиус:

1) $(x-1)^2+(y-2)^2=9$;
2) $(x+3)^2+(y-4)^2=16$;
3) $x^2+(y+5)^2=25$;
4) $(x-2)^2+y^2=14$.

173. Составьте уравнение окружности, если известны координаты ее центра K и радиус R:

1) $K(2;5)$, $R=2$; 2) $K(-4;0)$, $R=1$; 3) $K(0;5)$, $R=\sqrt{3}$.

174. Составьте уравнение окружности, проходящей через точку $D(-8; -2)$, центр которой принадлежит оси ординат, а радиус равен 10.

175. Составьте уравнение окружности с центром в точке $P(3; -1)$, проходящей через точку $M(-2; -4)$.

176. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, если $A(3; -6)$, $B(-1; 4)$.

177. Составьте уравнение окружности, центр которой находится в точке $A(-5; 8)$ и которая касается оси ординат.

178. Докажите, что данное уравнение является уравнением окружности, и укажите координаты центра и радиус этой окружности:

1) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 7 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 8y = 0$.

179. Найдите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 9 = 0$. Выясните положение точек $A(1; -5)$, $B(4; -3)$ и $C(3; -3)$ относительно этой окружности.

180. Выясните взаимное расположение двух окружностей:

1) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 1$ и $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$;

2) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ и $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$;

3) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ и $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$;

4) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 9$ и $(x-9)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Уравнение прямой

181. Найдите координаты точек пересечения прямой $3x + 7y = 21$ с осями координат. Принадлежит ли этой прямой точка: 1) $P(2; 3)$; 2) $K(4; -1)$?

182. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 4)$ и $B(3; -8)$.

183. Запишите уравнение прямой, изображенной на рисунке 11.

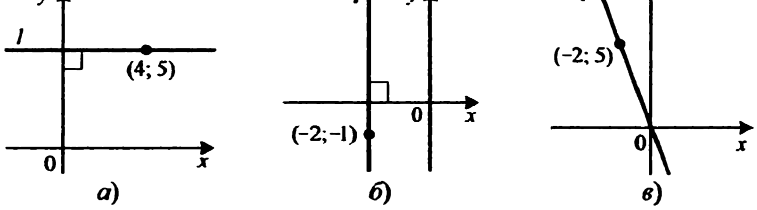


Рис. 11

184. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $M(5; -7)$ и параллельна: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат.

185. Точки $A(-4; 1)$, $B(3; 4)$ и $C(-1; -6)$ — вершины треугольника ABC. Составьте уравнение прямой, содержащей медиану AM треугольника.

186. При каком значении a точки $K(5; -4)$, $P(-1; a)$ и $F(3; -9)$ лежат на одной прямой?

187. Найдите координаты точки пересечения прямых $9x+5y=1$ и $2x+3y=8$.

Угловой коэффициент прямой

188. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки:

1) $A(3; 2)$ и $B(-4; 1)$;
2) $A(5; -7)$ и $B(4; 2)$;
3) $A(-6; 5)$ и $B(-9; 5)$.

189. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $C(3; -1)$, угловой коэффициент которой равен: 1) 5; 2) –2; 3) 0.

190. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $F(3; -5)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол: 1) 45°; 2) 135°.

191. Среди прямых, заданных своими уравнениями, укажите пары параллельных:

1) $3x-4y=-8$;
2) $6x-8y=9$;
3) $4x-7y=-6$;
4) $5x-10y=-7$;
5) $x-2y=1$.

192. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $K(-2; 5)$ и параллельна прямой $y=4x-2$.

193. Запишите уравнение прямой, изображенной на рисунке 12.

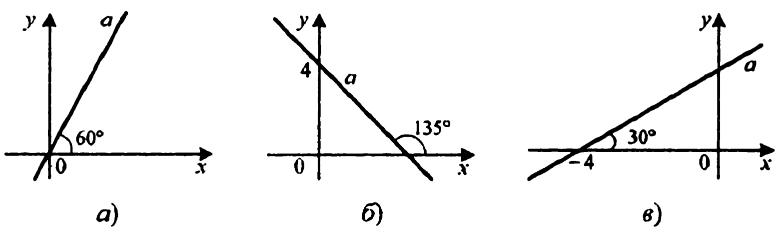


Рис. 12

Понятие вектора

194. На рисунке 13 изображен вектор $\overrightarrow{AC}$. Укажите начало и конец этого вектора. Отложите от точки M вектор, равный вектору $\overrightarrow{AC}$, и вектор, противоположно направленный с вектором $\overrightarrow{AC}$, модуль которого равен модулю вектора $\overrightarrow{AC}$.

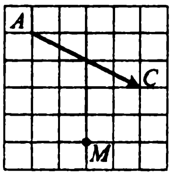


Рис. 13

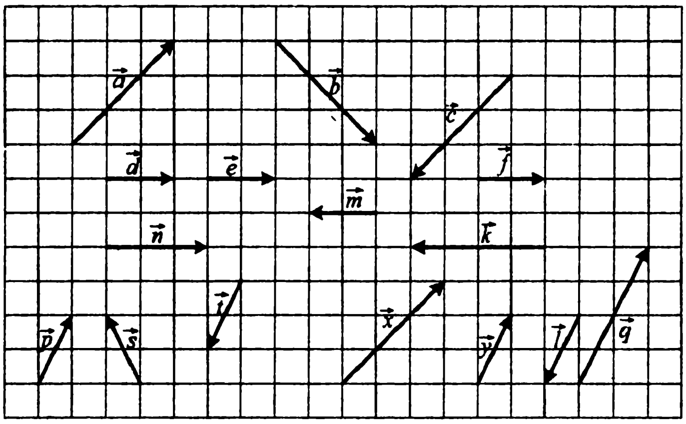


Рис. 14

195. Какие из векторов, изображенных на рисунке 14: 1) равны; 2) сонаправлены; 3) противоположно направлены; 4) коллинеарны; 5) имеют равные модули?

196. Четырехугольник $ABCD$ — ромб (рис. 15). Укажите вектор, равный вектору: 1) $\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{BO}$; 5) $\overrightarrow{DO}$; 6) $\overrightarrow{AO}$.

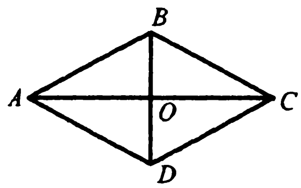


Рис. 15

197. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 5$ см, $BD = 13$ см, O — точка пересечения диагоналей. Найдите: 1) $\left|\overrightarrow{CD}\right|$; 2) $\left|\overrightarrow{AO}\right|$; 3) $\left|\overrightarrow{BC}\right|$; 4) $\left|\overrightarrow{OB}\right|$.

Координаты вектора

198. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

1) $A(2; 3)$, $B(-1; 4)$;
2) $A(3; 0)$, $B(0; -3)$;
3) $A(0; 0)$, $B(-2; -8)$;
4) $A(m; n)$, $B(p; k)$.

199. Даны точки $A(3; -7)$, $B(4; -5)$, $C(5; 8)$, $D(x; y)$. Найдите x и y, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

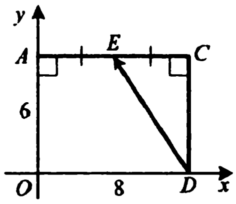


Рис. 16

200. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{DE}$ (рис. 16).

201. От точки $A(4; -3)$ отложен вектор $\vec{m}(-1; 8)$. Найдите координаты конца вектора.

202. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(3; -4)$, $B(-2; 7)$, $C(-4; 16)$, $D(1; 5)$ является параллелограммом.

203. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(3; -2)$, $B(-4; 1)$, $C(-2; -3)$. Найдите координаты вершины D.

204. Среди векторов $\vec{a}(3; -4)$, $\vec{b}(-4; 2)$, $\vec{c}(3; \sqrt{11})$, $\vec{d}(-2; -4)$, $\vec{e}(-1; -2\sqrt{6})$, $\vec{f}(-4; 5)$ найдите те, которые имеют равные модули.

205. Модуль вектора $\vec{a}(x; -8)$ равен 10. Найдите x.

206. Модуль вектора $\vec{c}$ равен 2, а его координаты равны. Найдите координаты вектора $\vec{c}$.

207. Две вершины прямоугольника $ABCD$ — точки $A(2; 5)$ и $B(7; 5)$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ равен 13. Найдите координаты точек C и D.

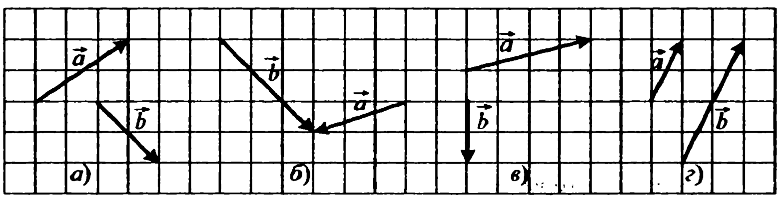


Рис. 17

Сложение и вычитание векторов

208. С помощью правила треугольника постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 17.

209. С помощью правила параллелограмма постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 17, *а*), *б*), *в*).

210. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 17, постройте вектор $\vec{a}-\vec{b}$.

211. Четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник, O — точка пересечения его диагоналей. Среди данных пар векторов укажите пары противоположных векторов:

1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{CO}$; 5) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$;

2) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; 4) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{OD}$; 6) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CD}$.

212. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Найдите:

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DA}$.

2) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$;

213. Может ли быть нулевым вектором сумма трех векторов, модули которых равны:

1) 2; 3; 6; 2) 4; 5; 9; 3) 5; 8; 12?

214. Даны векторы $\vec{a}(4;-5)$ и $\vec{b}(-1;7)$. Найдите:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$; 4) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

215. Даны точки $A(4;0)$ и $B(0;-3)$. Найдите координаты точки C такой, что $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

216. Найдите координаты векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если их сумма имеет координаты (5; –2), а разность — (7; 5).

217. Может ли модуль суммы двух ненулевых векторов быть больше, чем сумма их модулей?

218. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 18). Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{CO}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BO}=\vec{b}$.

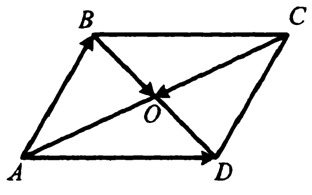


Рис. 18

219. Постройте такие ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$.

220. Даны векторы $\vec{a}(3; -4)$, $\vec{b}(-2; 7)$, $\vec{c}(-6; y)$. При каком значении y модуль вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ будет принимать наименьшее значение?

221. Найдите геометрическое место точек $C(x; y)$ координатной плоскости таких, что для точек $A(-3; 2)$ и $B(1; 5)$ выполняется равенство:

1) $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}|$; 2) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{AB}|$.

Умножение вектора на число

222. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 19). Постройте вектор:

1) $2\vec{a}$; 2) $-\frac{2}{3}\vec{b}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$.

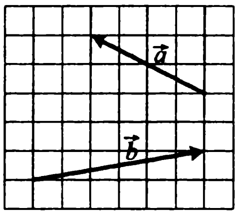


Рис. 19

223. Постройте два неколлинеарных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Отметьте произвольную точку и отложите от нее вектор:

1) $3\vec{m} - 2\vec{n}$; 2) $\frac{1}{4}\vec{m} + \frac{2}{5}\vec{n}$.

224. Известно, что $|\vec{a}| = 3$. Чему равен модуль вектора: 1) $4\vec{a}$; 2) $-0{,}7\vec{a}$?

225. Даны векторы $\vec{a}(2; -3)$ и $\vec{b}(4; -5)$. Найдите координаты вектора:

1) $2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $3\vec{a} + 4\vec{b}$; 3) $5\vec{a} - \vec{b}$; 4) $3\vec{b} - 4\vec{a}$.

226. Вычислите модуль вектора $\vec{m} = -3\vec{p}$, где $\vec{p}(4; -3)$.

227. Найдите модуль вектора $\vec{n} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, где $\vec{a}$ (1; –2); $\vec{b}$ (–1; 3).

228. Точки E и F — середины сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$ соответственно (рис. 20). Выразите вектор $\overrightarrow{FE}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

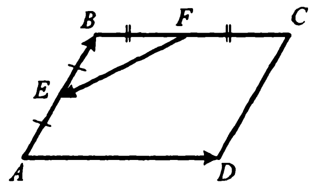


Рис. 20

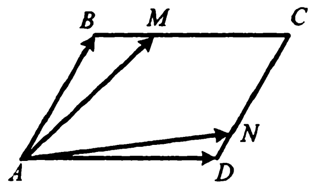


Рис. 21

229. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причем $BM = \frac{1}{3}BC$, $CN = \frac{4}{5}CD$ (рис. 21). Выразите:

1) векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$;

2) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{AN} = \vec{n}$.

230. Известно, что O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, $AO : OC = 5 : 7$, $BO : OD = 3 : 4$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

231. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены такие точки D и E соответственно, что $AD : DC = 3 : 2$, $BE : EC = 1 : 3$. Выразите:

1) векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{BE} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$;

2) векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$.

232. Точка M — середина отрезка AB, а точка C не лежит на прямой AB. Докажите, что $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$.

233. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KP}$, если $M(3; -2)$, $N(-7; 4)$, $K(6; -3)$, $P(1; 0)$?

234. Среди векторов $\vec{a}(3; -2)$, $\vec{b}(-9; 6)$, $\vec{c}(6; -4)$, $\vec{d}(-27; 18)$ найдите сонаправленные и противоположно направленные векторы.

235. Найдите значение k, при котором векторы $\vec{m}(-2; k)$ и $\vec{n}(3; 6)$ коллинеарны.

236. Найдите координаты вектора, модуль которого равен 1 и который сонаправлен с вектором:

1) $\vec{a}(-5;12)$; 2) $\vec{b}(4;5)$; 3) $\vec{c}(m;n)$.

237. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a}(-6;8)$, если $|\vec{b}|=20$.

238. Даны вектор $\vec{a}(5;-4)$ и точка $K(-3;7)$. Найдите координаты точки P такой, что векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{KP}$ противоположно направлены и имеют равные модули.

239. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-4;-5)$, $B(-3;2)$, $C(3;4)$ и $D(8;-1)$ является трапецией.

240. Лежат ли точки $A(4;2)$, $B(5;6)$ и $C(7;14)$ на одной прямой?

241. Известно, что O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), $BC=3$, $AD=7$. Найдите такое число x, что:

1) $\overrightarrow{OC}=x\cdot\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{OB}=x\cdot\overrightarrow{OD}$.

242. Даны векторы $\vec{a}(3;-4)$, $\vec{b}(2;3)$ и $\vec{m}(8;-5)$. Найдите такие числа x и y, что $\vec{m}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

Скалярное произведение векторов

243. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$;

2) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=7$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=150°$;

3) $|\vec{a}|=9$, $|\vec{b}|=8$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=90°$.

244. Медианы BM и CD правильного треугольника ABC со стороной 8 см пересекаются в точке O. Найдите скалярное произведение векторов:

1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{AC}$; 5) $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{OM}$;

2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OC}$; 6) $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OM}$.

245. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°, $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$.

Найдите:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$; 3) $(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{a}$; 4) $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot\vec{a}$.

246. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Вычислите скалярное произведение $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.

247. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}\,(3; 4)$, $\vec{b}\,(5; 2)$;
2) $\vec{a}\,(4; -3)$, $\vec{b}\,(-6; 1)$;
3) $\vec{a}\,(-8; 4)$, $\vec{b}\,(3; 6)$.

248. Даны векторы $\vec{a}(3; -2)$ и $\vec{b}(x; 4)$. При каком значении x $\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$?

249. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}(-2; 3)$ и $\vec{b}(3; -4)$.

250. Найдите косинусы углов треугольника ABC, если $A(-3; 2)$, $B(5; 3)$, $C(-4; -3)$. Определите вид треугольника.

251. Даны векторы $\vec{a}(5; 2)$ и $\vec{b}(-4; y)$. При каком значении y векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?

252. Даны векторы $\vec{a}(3; -5)$ и $\vec{b}(x; 6)$. При каких значениях x угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$: 1) острый; 2) прямой; 3) тупой?

253. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(-2; 1)$, $B(2; 5)$, $C(5; 2)$, $D(1; -2)$ является прямоугольником.

254. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, коллинеарного вектору $\vec{n}(-3; 1)$, если $\vec{m} \cdot \vec{n} = 24$.

255. Найдите координаты вектора, перпендикулярного вектору $\vec{m}(2; 5)$, модуль которого равен модулю вектора $\vec{m}$.

256. Даны векторы $\vec{a}\,(-2; 3)$ и $\vec{b}\,(1; -3)$. Найдите значение m, при котором векторы $\vec{a} + m\vec{b}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

257. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и $\vec{m} \perp \vec{n}$.

258. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$. Найдите:

1) $|\vec{a} + \vec{b}|$;
2) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

259. Найдите косинусы углов, которые образует вектор $\overrightarrow{AB}$, где $A(-5;4)$, $B(1;-4)$, с положительными направлениями координатных осей.

260. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, а векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $3\vec{a}+\vec{b}$ перпендикулярны.

261. Найдите геометрическое место точек $K(x;y)$ координатной плоскости таких, что для точек $A(3;-2)$ и $B(5;4)$ выполняется равенство:

1) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=0$;
2) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AB}=0$;
3) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BK}=0$;
4) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BK}=4$.

262. Составьте уравнение прямой, которая касается окружности с центром $M(3;-1)$ в точке $E(2;4)$.

263. Основание равнобедренного треугольника и высота, опущенная на него, равны по 4 см. Найдите косинус угла между медианами, проведенными к боковым сторонам треугольника, лежащего против основания треугольника.

264. Докажите с помощью векторов, что диагонали ромба перпендикулярны.

Параллельный перенос

265. Постройте образ треугольника ABC при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 22).

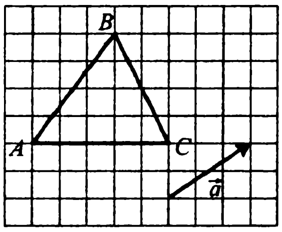


Рис. 22

266. Найдите точки, являющиеся образами точек $A(3;-1)$, $B(0;4)$, $C(-2;0)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{m}(3;-4)$. Образами каких точек при таком параллельном переносе являются точки $M(-2;1)$, $N(5;0)$, $P(0;-3)$?

267. При параллельном переносе образом точки $A(-2;3)$ является точка $B(-3;5)$. Какая точка является образом точки $C(4;-3)$ при этом параллельном переносе?

268. Найдите вектор, при параллельном переносе на который образом точки $A(3;1)$ будет точка $B(-1;4)$, и вектор, при параллельном переносе на который образом точки B будет точка A.

269. Постройте образы точек $A(1; 3)$, $B(0; -4)$ и $C(2; 0)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(2; 0)$. Запишите координаты построенных точек.

270. Даны точки $K(-4; 7)$ и $P(8; -1)$. При параллельном переносе образом середины отрезка KP является точка $M(-3; -1)$. Найдите координаты точек, являющихся образами точек K и P.

271. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-2;4)$, $B(3;-2)$, $C(-1;-3)$. Осуществили параллельный перенос треугольника ABC, при котором образом точки B является точка C. Каковы координаты вершин полученного треугольника? Выполните рисунок.

272. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, точка M — середина стороны CD. Существует ли параллельный перенос, при котором: 1) сторона CD является образом стороны AB; 2) сторона AD является образом стороны BC; 3) отрезок CM является образом отрезка MD? В случае утвердительного ответа укажите вектор, на который должен осуществляться параллельный перенос.

273. Запишите уравнение окружности, являющейся образом окружности $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 14$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(2; -1)$.

274. Выполнили параллельный перенос прямой $2x + 3y = 6$. Запишите уравнение полученной прямой, если она проходит через точку: 1) $O(0; 0)$; 2) $B(-1; 4)$.

Осевая симметрия

275. Даны прямая l и точка P, ей не принадлежащая. Постройте точку, симметричную точке P относительно прямой l.

276. Постройте образы отрезков AB и CD, изображенных на рисунке 23, при симметрии относительно прямой m.

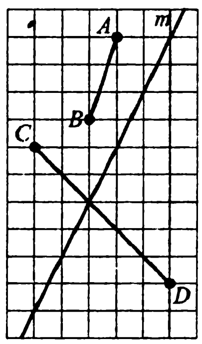


Рис. 23

277. Начертите окружность радиусом 3 см и проведите прямую, не проходящую через ее центр. Постройте окружность, симметричную данной относительно этой прямой.

278. Какие условия должны выполняться, чтобы прямая l была осью симметрии отрезка?

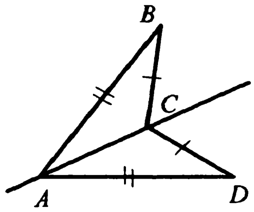


Рис. 24

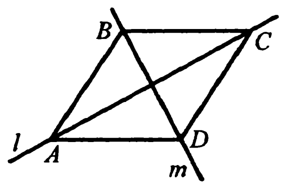


Рис. 25

279. На рисунке 24 $AB = AD$, $CB = CD$. Докажите, что точки B и D симметричны относительно прямой AC.

280. Докажите, что если треугольник имеет ось симметрии, то он является равнобедренным.

281. Сколько осей симметрии имеет: 1) прямоугольник; 2) окружность; 3) равнобокая трапеция?

282. Точки A и B лежат на прямой, перпендикулярной прямой l. Можно ли утверждать, что прямая l — ось симметрии этих точек?

283. Начертите четырехугольник, имеющий только одну ось симметрии, причем ни одна из диагоналей не должна принадлежать этой оси.

284. Прямая AC является осью симметрии четырехугольника $ABCD$. Есть ли в этом четырехугольнике пары равных сторон? Ответ обоснуйте.

285. Прямые l и m — оси симметрии четырехугольника $ABCD$ (рис. 25). Докажите, что $ABCD$ — ромб.

286. Найдите координаты точек, симметричных точке $K(3; -1)$ относительно осей координат.

287. Найдите x и y, если точки $A(x; -2)$ и $B(3; y)$ симметричны относительно оси ординат.

288. Постройте точки, симметричные точкам $M(3; -4)$, $K(4; 0)$ и $P(0; -5)$ относительно: 1) оси x; 2) оси y; 3) прямой, содержащей биссектрисы I и III координатных углов. Запишите координаты полученных точек.

289. Осями симметрии прямоугольника являются прямые $y = 5$ и $x = 3$. Одна из его вершин имеет координаты $(-2; 3)$. Найдите координаты остальных вершин прямоугольника.

290. Диагонали ромба лежат на координатных осях. Найдите координаты вершин ромба, если середина одной из его сторон имеет координаты $(4; -3)$.

291. Постройте ромб $ABCD$, у которого диагональ AC данной длины m лежит на данной прямой, а вершины B и D — на двух данных окружностях.

292. Постройте квадрат, у которого две противоположные вершины лежат на данной прямой l, а две другие — на данной окружности и данной прямой m.

Центральная симметрия

293. Даны точки M и K. Постройте точку M_1, симметричную точке M относительно точки K.

294. Даны отрезок AB и точка O, ему не принадлежащая. Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно точки O.

295. Даны луч OE и точка P, ему не принадлежащая. Постройте луч, симметричный данному относительно точки P.

296. Даны угол ABC и точка O, принадлежащая углу, но не принадлежащая его сторонам. Постройте угол, симметричный углу ABC относительно точки O.

297. Имеет ли центр симметрии: 1) отрезок; 2) луч; 3) пара пересекающихся прямых? В случае утвердительного ответа укажите центр симметрии.

298. Может ли образом прямой при центральной симметрии быть эта же прямая?

299. На рисунке 26 прямые AB и CD параллельны. Точки A и D симметричны относительно точки O. Прямая BC проходит через точку O. Докажите, что точки B и C симметричны относительно точки O.

300. Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке O (рис. 27). Отрезок AB делится точкой O пополам. Докажите, что данные окружности симметричны относительно точки O.

301. Точки D и E симметричны точкам A и B соответственно относительно точки C, не принадлежащей прямой AB. Докажите, что прямые AB и DE параллельны.

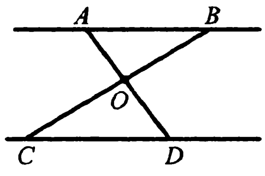


Рис. 26

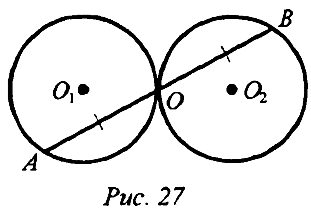


Рис. 27

302. Найдите точку, симметричную точке $D(-5;-7)$ относительно начала координат.

303. Среди точек $A(3;-4)$, $B(-3;-4)$, $C(-3;4)$, $D(4;-7)$, $K(-4;7)$ и $P(3;4)$ укажите пары точек, симметричных относительно начала координат.

304. Симметричны ли точки $M(-5;8)$ и $N(-3;4)$ относительно точки $K(-1;2)$?

305. Найдите координаты центра симметрии точек $A(-4;3)$ и $B(2;-7)$.

306. Найдите координаты точки C, симметричной точке $B(-3;1)$ относительно точки $A(2;-5)$.

307. Точки $A(-4;m)$ и $B(n;3)$ симметричны относительно точки $K(5;-2)$. Найдите m и n.

308. Запишите уравнение окружности, симметричной окружности $(x-4)^2+(y+3)^2=11$ относительно:

1) начала координат; 2) точки $M(-4;2)$.

309. Запишите уравнение прямой, симметричной прямой $2x-5y=-7$ относительно: 1) начала координат; 2) точки $K(-2;1)$.

310. Постройте отрезок, серединой которого является данная точка, а концы принадлежат двум данным прямым.

311. Даны две окружности, которые пересекаются в точках K и P. Проведите через точку K прямую так, чтобы данные окружности отсекали на ней равные отрезки.

Поворот

312. Даны точки K и O. Постройте образ точки K при повороте вокруг точки O: 1) на угол 30° против часовой стрелки; 2) на угол 100° по часовой стрелке.

313. Даны отрезок AB и точка O, ему не принадлежащая. Постройте образ отрезка AB при повороте на угол 45° вокруг точки O по часовой стрелке.

314. Точка O — центр квадрата $ABCD$ (рис. 28). Укажите образы точек B, D, O, стороны CD, диагонали AC при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 90°.

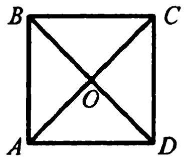


Рис. 28

315. Дан луч OA. Постройте образ этого луча при повороте на угол 80° против часовой стрелки вокруг: 1) точки O; 2) точки B, не принадлежащей лучу.

316. Постройте точки, являющиеся образами точек $A(4; 0)$, $B(0; -3)$, $C(4; 1)$, $D(-1; -4)$ при повороте на угол 90° по часовой стрелке вокруг начала координат. Укажите координаты полученных точек.

317. Образом точки $A(5; a)$ при повороте на угол 90° против часовой стрелки вокруг начала координат является точка $B(-4; b)$. Найдите b и a.

318. На какой наименьший угол надо повернуть квадрат вокруг его центра симметрии, чтобы его образом был этот же квадрат?

319. Правильный треугольник со стороной 6 см повернули на угол 60° вокруг его центра. Найдите периметр шестиугольника, образовавшегося при пересечении этих треугольников.

320. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, вершиной прямого угла которого является данная точка A, а две другие вершины принадлежат двум данным прямым l_1 и l_2.

321. Постройте равносторонний треугольник, одной из вершин которого является данная точка, а две другие вершины принадлежат данной прямой и данной окружности.

322. Постройте квадрат, если дана точка пересечения его диагоналей, а две соседние вершины лежат на двух данных окружностях.

323. Постройте квадрат с центром в данной точке так, чтобы середины двух его соседних сторон принадлежали двум данным прямым.

Гомотетия. Подобие фигур

324. Начертите отрезок AB длиной 2 см и отметьте точку O, не принадлежащую этому отрезку. Постройте отрезок, гомотетичный отрезку AB с центром гомотетии в точке O и коэффициентом: 1) $k = 3$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

325. Начертите острый угол и отметьте точку A, принадлежащую углу, но не принадлежащую его сторонам. Постройте угол, гомотетичный данному с центром гомотетии в точке A и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$.

326. Постройте треугольник, гомотетичный данному тупоугольному треугольнику с центром гомотетии в точке пересечения его медиан и коэффициентом гомотетии: 1) $k = 2$; 2) $k = -1$.

327. Отметьте точки A и B. Найдите такую точку O, чтобы точка B была образом точки A при гомотетии с центром O и коэффициентом $k = 2$.

328. Образом точки $A(-2; 8)$ при гомотетии с центром в начале координат является точка $B(-1; 4)$. Найдите коэффициент гомотетии.

329. Даны две пары гомотетичных точек: A и A_1, B и B_1, не лежащие на одной прямой. Каково взаимное расположение прямых AB и A_1B_1? Где находится центр гомотетии?

330. Могут ли два треугольника быть гомотетичными, но не подобными?

331. Стороны двух правильных треугольников относятся как 5 : 7. Как относятся их площади?

332. Сторона одного квадрата равна диагонали другого. Как относятся их площади?

333. Найдите отношение площадей частей, на которые делит треугольник его средняя линия.

334. Площади двух квадратов относятся как 2 : 5. Сторона большего квадрата равна 8 см. Найдите сторону меньшего квадрата.

335. Периметры подобных многоугольников относятся как 3 : 8, а разность их площадей равна 385 см^2. Найдите площади многоугольников.

336. Сторона треугольника равна 6 см. Прямая, параллельная этой стороне, делит его на две равновеликие фигуры. Найдите длину отрезка этой прямой, содержащегося между сторонами треугольника.

337. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12 см. Прямая, параллельная медиане треугольника, проведенной к гипотенузе, делит треугольник на две фигуры, площади которых относятся как 1 : 5. Найдите длину отрезка этой прямой, содержащегося между сторонами треугольника.

338. Точка M — середина стороны BC квадрата $ABCD$. Отрезки AM и BD пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника APD, если площадь треугольника BPM равна 6 см^2.

339. Проведите прямую, параллельную медиане данного треугольника, так, чтобы она отсекала от него треугольник, площадь которого равна $\frac{1}{18}$ площади данного треугольника.

340. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если $AD : BC = 7 : 5$, а площадь треугольника AED равна 98 см^2.

341. В данный ромб впишите квадрат так, чтобы стороны квадрата были параллельны диагоналям ромба.

Прямые и плоскости в пространстве

342. Могут ли две различные плоскости иметь только одну общую точку?

343. Сколько различных плоскостей можно провести через две произвольные точки?

344. Можно ли утверждать, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую: 1) на плоскости; 2) в пространстве?

345. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Каково взаимное расположение прямых AB и CD?

346. Прямые a и b не лежат в одной плоскости и прямые b и c не лежат в одной плоскости. Верно ли утверждение, что прямые a и c не лежат в одной плоскости?

347. Точка A не принадлежит плоскости α. Сколько существует прямых, проходящих через точку A и параллельных плоскости α?

348. Прямая a параллельна плоскости α. Существуют ли в плоскости α прямые, которые не параллельны прямой a?

349. Могут ли быть параллельными плоскости, проходящие через непараллельные прямые?

350. Верно ли, что если прямая не перпендикулярна плоскости, то она не перпендикулярна ни одной прямой этой плоскости?

351. Из точки A опущен перпендикуляр AC на плоскость α, точка D принадлежит плоскости α. Найдите:

1) CD, если $AD = 20$ см, $AC = 16$ см;

2) AD, если $\angle ADC = 30°$, $CD = 6\sqrt{3}$ см.

352. Из точки A опущен перпендикуляр AB на плоскость α, точки C и D принадлежат плоскости α, $AC = 8$ см, $\angle BAC = 60°$, $\angle BAD = 45°$. Найдите длину отрезка BD.

353. Из точки A опущен перпендикуляр AO на плоскость α, точки B и C принадлежат плоскости α, $BO = 1$ см, $CO = 7$ см, отрезок AB на 4 см меньше отрезка AC. Найдите длину перпендикуляра AO.

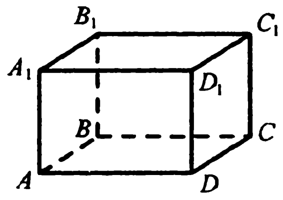


Рис. 29

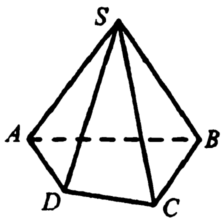


Рис. 30

Прямая призма

354. На рисунке 29 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите:

1) ребра, параллельные ребру AD;

2) ребра, скрещивающиеся с ребром CC_1;

3) ребра, параллельные грани ABC;

4) ребра, перпендикулярные грани A_1B_1B.

355. Найдите площадь поверхности и объем куба с ребром 4 см.

356. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда (рис. 29), если $AB = 4$ см, $BC = 3$ см, $AA_1 = 5$ см.

357. Основанием прямой призмы является параллелограмм, стороны которого равны 6 см и 8 см, а острый угол — 60°. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 10 см.

358. Основанием прямой призмы является правильный треугольник со стороной 6 см, а боковое ребро призмы равно 5 см. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы.

359. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 10 см, а один из катетов — 6 см. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 5 см.

360. Основанием прямой призмы является равнобокая трапеция с основаниями 6 см и 12 см и боковой стороной 5 см. Найдите площадь поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 4 см.

Пирамида

361. На рисунке 30 изображена пирамида $SABCD$. Назовите:

1) основание пирамиды;

2) вершину пирамиды;

3) боковые ребра пирамиды;

4) боковые грани пирамиды.

362. Все грани треугольной пирамиды — правильные треугольники со стороной 8 см. Найдите площадь поверхности пирамиды.

363. Вычислите площадь поверхности четырехугольной пирамиды, развертка которой изображена на рисунке 31 (длины отрезков даны в сантиметрах).

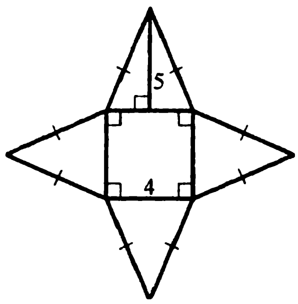


Рис. 31

364. Боковые ребра SA, SB, SC и SD четырехугольной пирамиды $SABCD$ равны, $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle DSA = 45°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $SA = 6$ см.

365. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной 4 см. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 3 см.

366. Найдите объем пирамиды, основание которой — правильный треугольник со стороной 6 см, а высота пирамиды равна 4 см.

367. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник MKP, $MK = MP = 13$ см, $KP = 24$ см. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 5 см.

Цилиндр

368. На рисунке 32 изображен цилиндр. Назовите отрезок, являющийся:

1) образующей цилиндра;

2) радиусом нижнего основания цилиндра;

3) радиусом верхнего основания цилиндра.

Какая прямая является осью цилиндра?

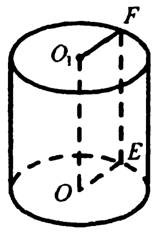


Рис. 32

369. Радиус основания цилиндра равен 5 см, а его образующая — 4 см. Найдите площадь поверхности и объем цилиндра.

370. Прямоугольник, стороны которого равны 10 см и 6 см, вращается вокруг большей стороны. Найдите площадь поверхности и объем полученного цилиндра.

Конус

371. На рисунке 33 изображен конус. Назовите отрезок, являющийся:

1) высотой конуса;

2) образующей конуса;

3) радиусом основания конуса.

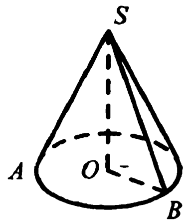


Рис. 33

372. Радиус основания конуса равен 15 см, а образующая — 17 см. Найдите площадь поверхности и объем конуса.

373. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 см и 8 см, вращается вокруг меньшего катета. Найдите площадь поверхности и объем полученного конуса.

374. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Он вращается сначала вокруг одного катета, а затем вокруг другого. Найдите отношение объемов полученных конусов.

Шар

375. Найдите площадь поверхности и объем шара, радиус которого равен 6 см.

376. Полукруг, диаметр которого равен 8 см, вращается вокруг этого диаметра. Найдите площадь поверхности и объем полученного шара.

377. Радиус шара увеличили в 3 раза. Как при этом изменились площадь поверхности и объем шара?

Вариант 2

Синус, косинус и тангенс угла от 0° до 180°

1. Чему равен:
1) $\sin(180° - \alpha)$, если $\sin\alpha = 0{,}9$;
2) $\cos(180° - \alpha)$, если $\cos\alpha = 0{,}23$;
3) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$?

2. Найдите значение выражения:
1) $6\sin 90° - 3\cos 180°$;
2) $2\cos 0° + \sin 0°$;
3) $\sin^2 50° + \cos^2 50°$;
4) $\cos 120° \sin 135° \operatorname{tg} 150°$;
5) $\sin^2 20° + \cos^2 160°$;
6) $\frac{\operatorname{tg} 125°}{\operatorname{tg} 55°}$.

3. Сравните с нулем значение выражения:
1) $\cos 102° \operatorname{tg} 92°$;
2) $\sin 0° \cos 28° \operatorname{tg} 82°$.

4. Найдите:
1) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$;
2) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ и $0° \le \alpha \le 90°$;
3) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$.

Теорема косинусов

5. Найдите сторону BC треугольника ABC, если:
1) $AB = 2\sqrt{3}$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 30°$;
2) $AB = 4$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 120°$.

6. Найдите косинусы углов треугольника, стороны которого равны 7 см, 9 см и 11 см.

7. Две стороны треугольника равны 7 см и 8 см, а синус угла между ними равен $\frac{4\sqrt{3}}{7}$. Найдите третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?

8. Определите вид треугольника, стороны которого равны:
1) 5 см, 6 см, 8 см; 2) 4 см, 7 см, 8 см; 3) 5 см, 12 см, 13 см.

9. Диагонали параллелограмма равны 8 см и 10 см, а угол между ними — 30°. Найдите стороны параллелограмма.

10. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены такие точки D и E соответственно, что $AD = 3$ см, $EC = 6$ см. Найдите длину отрезка DE, если $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 10$ см.

11. На стороне BC правильного треугольника ABC во внешнюю сторону построен прямоугольный треугольник BCD ($\angle C = 90°$). Найдите AD, если $AC = 3$ см, $DC = 6$ см.

12. Стороны треугольника, одна из которых на 8 см больше другой, образуют угол 120°, а третья сторона равна 28 см. Найдите периметр треугольника.

13. Одна сторона треугольника равна 35 см, а две другие относятся как 3 : 8 и образуют угол 60°. Найдите неизвестные стороны треугольника.

14. Две стороны треугольника равны 9 см и 21 см, а угол против большей из них равен 120°. Найдите третью сторону треугольника.

15. Основание равнобедренного треугольника равно c, а угол при вершине — α. Найдите медиану треугольника, проведенную к его боковой стороне.

16. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. Найдите длину диагонали AC.

17. Для сторон треугольника выполняется равенство $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Докажите, что угол, противолежащий стороне a, равен 60°.

18. Две стороны треугольника равны 16 см и 6 см, а угол между ними — 60°. Найдите медиану треугольника, проведенную к его третьей стороне.

19. Найдите стороны параллелограмма, если они относятся как 8 : 19, а диагонали параллелограмма равны 30 см и 50 см.

20. Диагонали параллелограмма равны 18 см и 26 см, а одна из сторон на 10 см больше другой. Найдите стороны параллелограмма.

21. Стороны треугольника равны 6 см, 12 см и 10 см. Найдите медиану треугольника, проведенную к его наименьшей стороне.

22. Две стороны треугольника равны 14 см и 22 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, — 12 см. Найдите третью сторону треугольника.

23. Основание равнобедренного треугольника равно $8\sqrt{2}$ см, а боковая сторона — 12 см. Найдите медиану треугольника, проведенную к его боковой стороне.

24. Сторона треугольника равна 42 см, а медианы, проведенные к двум другим сторонам, — 30 см и 60 см. Найдите третью медиану треугольника.

25. Докажите, что в любом треугольнике отношение суммы квадратов сторон к сумме квадратов медиан является величиной постоянной. Найдите эту величину.

Теорема синусов

26. В треугольнике ABC $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$, $\angle A = 30°$. Найдите сторону BC.

27. В треугольнике ABC $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle A = 120°$, $\angle B = 15°$. Найдите сторону AB.

28. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $BC = 2\sqrt{6}$ см, $\angle C = 60°$. Найдите угол A.

29. В треугольнике ABC $AC = 9$ см, $BC = 3\sqrt{3}$ см, $\angle A = 30°$. Найдите угол B. Сколько решений имеет задача?

30. В треугольнике ABC $AC = 9$ см, $BC = 7$ см. Может ли $\sin A$ быть равным $\frac{4}{5}$?

31. В треугольнике ABC $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Найдите стороны BC и AC.

32. На рисунке 34 $AC = b$, $\angle C = 90°$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ADB = \gamma$, $AD = m$. Найдите синус угла ABD.

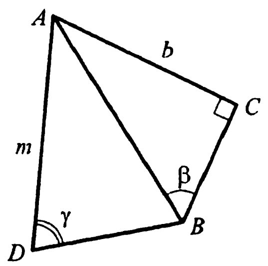


Рис. 34

33. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α, а биссектриса этого угла равна l. Найдите стороны треугольника.

34. Диагональ равнобокой трапеции равна d и делит ее острый угол на углы α и β (α — угол между диагональю и основанием трапеции). Найдите стороны трапеции.

35. В равнобедренном треугольнике основание равно a, а угол при основании — α. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины угла при основании треугольника.

36. На стороне AB ромба $ABCD$ отметили точку E такую, что $\angle BCE : \angle DCE = 1 : 4$. Найдите AE и CE, если $AB = a$, $\angle BCD = \alpha$.

37. На рисунке 35 $CD = b$, $AD = c$, $\angle BCD = \alpha$, $\angle BDC = \beta$, $\angle ACB = 90°$, $\angle ADB = \gamma$. Найдите AB.

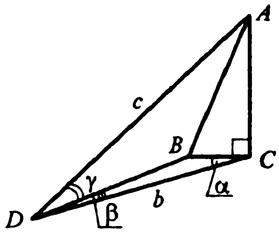


Рис. 35

38. Одна из сторон треугольника на 8 см больше другой, а углы, лежащие против этих сторон, равны соответственно 45° и 30°. Найдите эти стороны треугольника.

39. Докажите, что треугольник ABC и треугольник, стороны которого равны синусам углов треугольника ABC, подобны.

40. Найдите стороны AB и AC треугольника ABC, если его медиана AM равна m, $\angle BAM = \alpha$, $\angle CAM = \beta$.

41. В треугольнике ABC $BC = 5\sqrt{3}$ см, $\angle A = 120°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

42. Две стороны треугольника равны $2\sqrt{3}$ см и 8 см. Найдите третью сторону треугольника, если она равна радиусу описанной окружности данного треугольника.

43. В треугольнике ABC $\angle C = 73°$, $\angle B = 77°$, отрезок BH — высота треугольника. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если радиус окружности, описанной около треугольника HBC, равен 4 см.

44. В треугольнике ABC $\angle C = \alpha$. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AMB, где M — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

45. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а боковая сторона — 10 см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

46. В равнобокой трапеции основания равны 6 см и 24 см. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей этой трапеции, если известно, что они существуют.

47. Диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, если ее боковая сторона равна $5\sqrt{2}$ см.

48. На стороне AB треугольника ABC отметили произвольную точку D. Докажите, что отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ADC и BDC, является величиной постоянной для данного треугольника, то есть не зависит от выбора точки D.

Решение треугольников

49. Найдите неизвестные стороны и углы треугольника ABC, если:
1) $AB = 12$ см, $\angle A = 74°$, $\angle C = 39°$;
2) $BC = 6$ см, $\angle B = 21°$, $\angle C = 56°$;
3) $AC = 7$ см, $BC = 9$ см, $\angle C = 80°$;
4) $AB = 8$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 100°$;
5) $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $AC = 8$ см;
6) $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см;
7) $AC = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle A = 130°$;
8) $AC = 6$ см, $AB = 8$ см, $\angle C = 10°$;
9) $BC = 8$ см, $AC = 7$ см, $\angle B = 10°$;
10) $BC = 8$ см, $AC = 3$ см, $\angle B = 70°$.

50. В треугольнике ABC $\angle A = \angle B = 50°$, $AB = 8$ см. Найдите: 1) сторону AC; 2) биссектрису AD; 3) медиану CM; 4) высоту AH; 5) радиус вписанной окружности; 6) радиус описанной окружности.

51. В равнобокой трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AB = CD = m$, угол при большем основании равен α, а диагональ образует с большим основанием угол β. Найдите: 1) диагональ AC; 2) основания трапеции; 3) радиус окружности, описанной около трапеции; 4) радиус окружности, вписанной в треугольник AOD (O — точка пересечения диагоналей трапеции).

52. Меньшая сторона треугольника равна 4 см. В треугольник вписана окружность, которая делится точками касания со сторонами на дуги, градусные меры которых относятся как 7 : 8 : 9. Найдите две другие стороны треугольника.

53. В треугольнике ABC $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. На сторонах треугольника вне его построены квадраты. Их вершины последовательно соединили так, что получили шестиугольник. Найдите периметр шестиугольника.

Формулы для нахождения площади треугольника

54. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 9 см и $3\sqrt{2}$ см, а угол между ними равен: 1) 45°; 2) 150°.

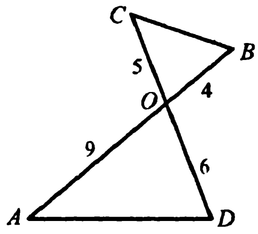


Рис. 36

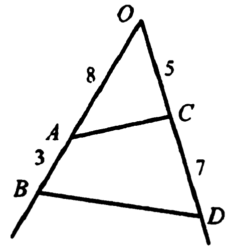


Рис. 37

55. Две стороны треугольника равны 7 см и 6 см. Может ли его площадь быть равной: 1) 23 см^2; 2) 21 см^2; 3) 17 см^2?

56. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30°, а площадь треугольника — $72\sqrt{3}$ см^2. Найдите боковую сторону треугольника.

57. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 36), $AO = 9$ см, $OB = 4$ см, $CO = 5$ см, $OD = 6$ см. Найдите отношение площадей треугольников AOD и COB.

58. На сторонах OB и OD угла O отложены отрезки $OA = 8$ см, $AB = 3$ см, $OC = 5$ см, $CD = 7$ см (рис. 37). Найдите отношение площадей треугольника OBD и четырехугольника $ABDC$.

59. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 13 см, 14 см и 15 см.

60. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, один из которых на 3 см больше другого. Две другие стороны треугольника равны 14 см и 21 см. Найдите площадь треугольника.

61. Найдите наибольшую высоту треугольника, стороны которого равны 9 см, 10 см и 11 см.

62. Три окружности, радиусы которых равны 9 см, 11 см и 12 см, попарно касаются друг друга. Определите площадь треугольника, вершинами которого являются центры этих окружностей.

63. В треугольник ABC со сторонами 30 см, 56 см и 82 см вписана окружность с центром O. Найдите площади треугольников AOB, BOC, AOC.

64. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 8 см и 14 см, а угол между ними — 150°.

65. Найдите площадь ромба, сторона которого равна $9\sqrt{2}$ см, а один из углов — 45°.

66. Среди всех параллелограммов с данными сторонами a и b укажите параллелограмм, имеющий наибольшую площадь. Найдите эту площадь.

67. Найдите площадь ромба, если один из его углов на 120° больше другого, а сторона ромба равна $6\sqrt{3}$ см.

68. Сторона квадрата равна стороне ромба, а острый угол ромба равен 45°. Найдите отношение площади квадрата к площади ромба.

69. Существует ли параллелограмм, стороны которого равны 4 см и 6 см, а соответствующие высоты — 5 см и 3 см?

70. Стороны параллелограмма равны 24 см и 30 см, а угол между высотами — 30°. Найдите площадь параллелограмма.

71. Найдите катеты прямоугольного треугольника, площадь которого равна $24\sqrt{3}$ см^2, а биссектриса прямого угла образует с гипотенузой угол 75°.

72. Диагонали четырехугольника перпендикулярны. Докажите, что его площадь равна половине произведения диагоналей.

73. На сторонах равностороннего треугольника вне его построены квадраты. Вершины квадратов последовательно соединены. Найдите площадь образовавшегося шестиугольника, если сторона треугольника равна 2 см.

74. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Площадь треугольника AOB равна 3 см^2, а площадь треугольника BOC — 6 см^2. Найдите площадь треугольника COD, если она на 9 см^2 больше площади треугольника AOD.

75. В окружность вписан четырехугольник, стороны которого последовательно равны 4 см, 6 см, 8 см, 12 см. Найдите площадь четырехугольника.

Правильные многоугольники и их свойства

76. Существует ли шестиугольник, все стороны которого равны, который не является правильным?

77. Найдите углы правильного n-угольника, если n равно: 1) 8; 2) 10; 3) 15.

78. Найдите количество сторон правильного многоугольника, если:

1) его угол равен 172°; 2) его внешний угол равен 24°.

79. Определите количество сторон правильного многоугольника, внешний угол которого на 156° меньше угла многоугольника.

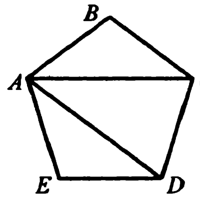


Рис. 38

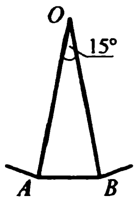


Рис. 39

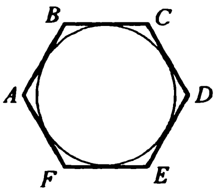


Рис. 40

80. Сумма внешних углов правильного многоугольника вместе с одним из углов многоугольника составляет 468°. Найдите количество сторон многоугольника.

81. На рисунке 38 изображен правильный пятиугольник $ABCDE$. Найдите угол CAD.

82. Центр правильного многоугольника соединили с концами стороны AB (рис. 39). Сколько сторон имеет этот многоугольник?

83. Найдите центральный угол правильного n-угольника, если n равно: 1) 4; 2) 12; 3) 72.

84. Центральный угол правильного многоугольника равен 24°. Найдите количество сторон многоугольника.

85. Какой наименьший угол может иметь правильный многоугольник?

86. На рисунке 40 изображен правильный шестиугольник, в который вписана окружность. Как проще всего на этом рисунке построить правильный двенадцатиугольник, вписанный в эту окружность?

87. По данной стороне a постройте правильный двенадцатиугольник.

88. Опишите около данной окружности правильный восьмиугольник.

89. Докажите, что сумма центрального угла правильного многоугольника вместе с одним из его углов составляет 180°.

90. В окружность вписан многоугольник, все стороны которого равны. Могут ли быть неравными его углы?

91. Докажите, что вершины правильного $2n$-угольника, взятые через одну, являются вершинами правильного n-угольника.

92. Сторона квадрата равна 6 см. Найдите радиусы его вписанной и описанной окружностей.

93. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен 2 см. Найдите сторону квадрата и радиус вписанной в него окружности.

94. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $4\sqrt{3}$ см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, и сторону треугольника.

95. Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен 6 см, а радиус окружности, вписанной в него, — $3\sqrt{2}$ см. Найдите сторону многоугольника и количество его сторон.

96. Существует ли правильный многоугольник, у которого отношение стороны к радиусу вписанной окружности равно 2?

97. В квадрат со стороной 8 см вписана окружность. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

98. Найдите радиусы окружностей, вписанной в правильный шестиугольник и описанной около него, если их разность равна 4 см.

99. Один правильный треугольник вписан в окружность, а другой — описан около нее. Найдите отношение сторон этих треугольников.

100. В правильный треугольник со стороной a вписана окружность, а в эту окружность вписан квадрат. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат.

101. Около правильного шестиугольника со стороной a описана окружность. Около окружности описан правильный треугольник. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

102. Радиус окружности равен 8 см. В окружность вписан правильный треугольник и на его стороне построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

103. Середины сторон правильного восьмиугольника соединены через одну так, что образовался квадрат. Найдите сторону квадрата, если сторона восьмиугольника равна a.

104. Найдите диагонали правильного восьмиугольника по радиусу R описанной окружности.

105. Центры двух пересекающихся окружностей лежат по одну сторону от общей хорды длиной 6 см, которая служит для одной из окружностей стороной правильного вписанного треугольника, а для другой — стороной правильного вписанного шестиугольника. Найдите расстояние между центрами окружностей.

106. Из одной вершины правильного шестиугольника проведены диагонали, которые делят его на четыре треугольника. Найдите отношение высот этих треугольников, проведенных из общей вершины.

107. Углы квадрата срезали так, что получили правильный восьмиугольник со стороной $2\sqrt{2}$ см. Найдите сторону квадрата.

108. Около правильного шестиугольника со стороной a описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин шестиугольника является величиной постоянной. Найдите ее.

109. Выразите площадь правильного восьмиугольника через длину его меньшей диагонали.

110. Вычислите площадь правильного восьмиугольника, вписанного в окружность, радиус которой 6 см.

111. Найдите отношение площадей правильных треугольника, четырехугольника и шестиугольника, периметры которых равны.

112. Сторона правильного восьмиугольника равна 2 см. Его стороны, взятые через одну, продолжили до пересечения так, что образовался квадрат. Найдите площадь этого квадрата.

113. Сторона квадрата равна $3\sqrt{2}$ см. Около него описана окружность, а около окружности — правильный шестиугольник. Найдите площадь шестиугольника.

Длина окружности

114. Найдите длину окружности, радиус которой равен: 1) 3 см; 2) 0,5 см; 3) 2π см; 4) $\frac{1}{\pi}$ см.

115. Найдите длину окружности, радиус которой на π см меньше диаметра.

116. Чему равен радиус окружности, длина которой: 1) 1 см; 2) 8 см; 3) 3π см; 4) $9\pi^2$ см?

117. Как построить окружность, длина которой равна разности длин двух данных окружностей?

118. Радиус окружности уменьшили: 1) в 4 раза; 2) на 4 см. Как при этом изменилась длина окружности?

119. В окружности по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды длиной 12 см и 16 см. Расстояние между хордами равно 14 см. Найдите длину окружности.

120. На катушку, радиус которой равен 1,5 см, намотано 40 см нитки. Сколько сделано полных витков?

121. Найдите скорость велосипедиста, который круговой маршрут диаметром 100 м проезжает 45 раз в час. Ответ в километрах в час округлите до единиц.

122. Постройте график зависимости радиуса окружности от ее длины.

123. Радиус окружности равен 4 см. Найдите длину дуги, содержащей: 1) 1°; 2) 45°; 3) 135°; 4) 180°; 5) 345°.

124. Длина дуги окружности равна 8π см, а ее градусная мера — $24°$. Найдите радиус окружности.

125. Длина дуги окружности равна 5π см. Найдите градусную меру этой дуги, если радиус окружности равен 20 см.

126. Начертите окружность радиусом 8 см. Отложите на ней дугу длиной 2π см.

127. Дуга окружности, радиус которой 6 см, содержит $240°$. Найдите радиус окружности, длина которой равна длине этой дуги.

128. Даны два равных перпендикулярных отрезка CA и CB длиной m. Проведена дуга AB окружности с центром C, и на отрезке AC как на диаметре построена полуокружность (рис. 41). Найдите длину линии, ограничивающей заштрихованную фигуру.

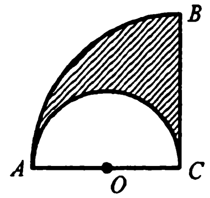


Рис. 41

129. Катеты AB и BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равны 8 см. Окружность с центром в точке B касается гипотенузы треугольника. Найдите длину дуги этой окружности, расположенной внутри треугольника.

130. На высоте BD равностороннего треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги этой окружности, расположенной внутри треугольника, если $AB = 6$ см.

131. В окружность, радиус которой равен 1, вписан квадрат, а около окружности описан правильный шестиугольник. Выполните рисунок и, пользуясь им, докажите, что $2\sqrt{2} < \pi < 2\sqrt{3}$.

Площадь круга

132. Найдите площадь круга, радиус которого равен: 1) 4 см; 2) $\frac{2}{\pi}$ см; 3) $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$ см.

133. Найдите с точностью до десятых радиус круга, площадь которого равна 9 см^2.

134. Площадь одного круга в 16 раз больше площади другого круга. Чему равно отношение радиусов этих кругов?

135. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна 6π см.

136. Площади двух кругов равны p см^2 и k см^2. Чему равно отношение длин окружностей этих кругов?

137. Найдите площадь круга, описанного около квадрата, площадь которого равна 8 см^2.

138. Найдите отношение площадей вписанного и описанного кругов правильного четырехугольника.

139. Найдите площадь кольца, расположенного между двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны 5 см и 8 см.

140. Найдите площадь сектора круга, радиус которого 6 см, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: 1) 18°; 2) 135°; 3) 330°.

141. Какую часть площади круга составляет площадь сектора, если соответствующий сектору центральный угол равен: 1) 25°; 2) 165°; 3) 225°?

142. Площадь сектора составляет $\frac{8}{15}$ площади круга. Найдите градусную меру центрального угла, соответствующего данному сектору.

143. Найдите радиус круга, если площадь сектора этого круга равна 45 см^2, а центральный угол, соответствующий этому сектору, равен 72°.

144. Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 8 см, а градусная мера дуги сегмента равна: 1) 60°; 2) 150°; 3) 225°.

145. Найдите площадь кругового сегмента, если его основание равно 6 см, а градусная мера дуги сегмента равна: 1) 30°; 2) 240°.

146. При каком условии сегмент круга можно разделить на секторы?

147. Найдите площади заштрихованных фигур, изображенных на рисунке 42 (длины отрезков даны в сантиметрах).

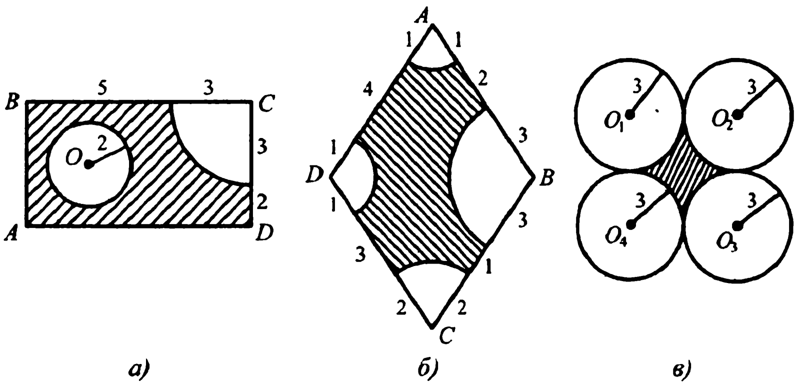


Рис. 42

148. Стороны треугольника равны 26 см, 28 см и 30 см. Найдите площади его описанного и вписанного кругов.

149. Площадь круга, вписанного в равнобокую трапецию, равна 12π см^2, а острый угол трапеции равен 60°. Найдите площадь трапеции.

150. Два круга имеют общую хорду. Найдите отношение площадей этих кругов, если из центра одного круга общая хорда видна под углом 90°, а из центра другого — под углом 120°.

151. Найдите площадь кругового кольца, содержащегося между описанной и вписанной окружностями правильного шестиугольника со стороной 6 см.

152. Стороны треугольника равны 13 см, 20 см и 21 см. В треугольник вписан полукруг, центр которого лежит на средней по длине стороне треугольника. Найдите площадь полукруга.

153. В полукруг, диаметр которого равен 16 см, вписан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого совпадает с диаметром полукруга, а один из углов равен 30°. Определите площадь той части полукруга, которая находится вне треугольника.

154. Радиус круга равен 8 см. В нем проведена хорда, равная стороне квадрата, вписанного в этот круг. Найдите площадь меньшего из сегментов, которые определяются этой хордой.

155. Найдите площадь круга, вписанного в сектор круга радиуса 3 см с хордой 2 см.

156. Радиус круга равен 2 см. По разные стороны от центра круга проведены две параллельные хорды, одна из которых равна стороне правильного вписанного треугольника, а другая — стороне правильного вписанного шестиугольника. Найдите площадь части круга, содержащейся между хордами.

Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Координаты середины отрезка

157. Найдите расстояние между точками A и B, если:
1) $A(3; -7)$, $B(6; -3)$; 2) $A(5; -2)$, $B(-3; 4)$; 3) $A(-1; 3)$, $B(4; -9)$.

158. Докажите, что точки $A(-3; -7)$, $B(2; 3)$ и $C(0; -1)$ лежат на одной прямой. Какая из точек лежит между двумя другими?

159. Вершинами треугольника являются точки $A(4; -2)$, $B(-4; 4)$, $C(-12; 10)$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

160. Расстояние между точками $A(x; 3)$ и $B(1; -5)$ равно 10. Найдите x.

161. На оси ординат найдите точку, равноудаленную от точек $A(4;-5)$ и $B(2;3)$.

162. Найдите координаты середины отрезка MN, если:

1) $M(2;-5)$, $N(8;3)$;
2) $M(-7;9)$, $N(-1;11)$;
3) $M(5;4)$, $N(-6;-3)$.

163. Точка M — середина отрезка AB. Найдите координаты точки A, если $B(6;-9)$, $M(2;5)$.

164. Найдите координаты точки, которая делит отрезок AB в отношении $1:3$, считая от точки A, если $A(5;-7)$, $B(7;-9)$.

165. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-3;-2)$, $B(5;3)$, $C(3;-5)$. Найдите координаты четвертой вершины.

166. Точки $B_1(3;-1)$ и $C_1(-4;2)$ — середины сторон AC и AB треугольника ABC соответственно. Найдите координаты точек B и C, если $A(-5;3)$.

167. Точки $M(5;-2)$, $N(3;4)$, $P(-3;-6)$ — середины сторон некоторого треугольника. Найдите координаты его вершин.

168. В треугольнике ABC $A(3;-5)$, $B(7;1)$, $C(-3;9)$. Найдите длину средней линии MN треугольника ABC, где точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно.

169. Найдите длину отрезка, концы которого лежат на осях координат и серединой которого является точка $M(-6;4)$.

170. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-1;1)$, $B(-3;7)$, $C(3;5)$, $D(5;-1)$ является ромбом.

171. Найдите координаты вершины B равностороннего треугольника ABC, если известны координаты вершин $A(0;-4)$ и $C(0;2)$.

Уравнение окружности

172. Определите по уравнению окружности координаты ее центра и радиус:

1) $(x-3)^2+(y-5)^2=25$;
2) $(x+2)^2+(y-1)^2=49$;
3) $x^2+(y-4)^2=16$;
4) $(x+3)^2+y^2=12$.

173. Составьте уравнение окружности, если известны координаты ее центра K и радиус R:

1) $K(-3;1)$, $R=3$;
2) $K(0;2)$, $R=2$;
3) $K(-4;0)$, $R=\sqrt{5}$.

174. Составьте уравнение окружности радиуса 5, проходящей через точку $M(2;-3)$, центр которой принадлежит оси абсцисс.

175. Составьте уравнение окружности с центром в точке $T(-1; 2)$, проходящей через точку $A(3; -5)$.

176. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, если $A(-3; 9)$, $B(5; -7)$.

177. Составьте уравнение окружности, центр которой находится в точке $A(2; -3)$ и которая касается оси абсцисс.

178. Докажите, что данное уравнение является уравнением окружности, и укажите координаты центра и радиус этой окружности:

1) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 12x - 36 = 0$.

179. Найдите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 - 8x + y^2 + 10y - 41 = 0$. Выясните положение точек $O(0; 0)$, $A(-1; 1)$, $B(10; 1)$ относительно этой окружности.

180. Выясните взаимное расположение двух окружностей:

1) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$ и $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$;

2) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$ и $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$;

3) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ и $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$;

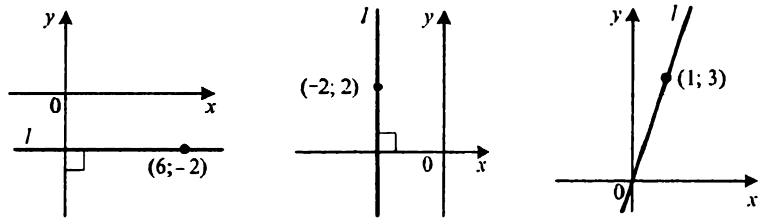
4) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ и $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 1$.

Уравнение прямой

181. Найдите координаты точек пересечения прямой $4x - 3y = -12$ с осями координат. Принадлежит ли этой прямой точка: 1) $M(1; 5)$; 2) $N(3; 8)$?

182. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2; 1)$ и $B(4; 7)$.

183. Запишите уравнение прямой, изображенной на рисунке 43.



а) *б)* *в)*

Рис. 43

184. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $E(-2;-3)$ и параллельна: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат.

185. Точки $A(-3; 5)$, $B(2; 4)$ и $C(1; 3)$ — вершины треугольника ABC. Составьте уравнение прямой, содержащей медиану BM треугольника.

186. При каком значении a точки $A(2; -3)$, $B(4; 1)$ и $C(a; -2)$ лежат на одной прямой?

187. Найдите координаты точки пересечения прямых $2x-5y=7$ и $-x+3y=12$.

Угловой коэффициент прямой

188. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки:

1) $A(5;-2)$ и $B(-3;1)$;
2) $A(4;3)$ и $B(-3;-1)$;
3) $A(-5;1)$ и $B(2;-7)$.

189. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-4)$, угловой коэффициент которой равен: 1) 4; 2) -1; 3) 0.

190. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $E(-4; 3)$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол: 1) 30°; 2) 120°.

191. Среди прямых, заданных своими уравнениями, укажите пары параллельных:

1) $x-3y=-5$;
2) $3x+2y=-15$;
3) $-2x+6y=-17$;
4) $8x-y=-19$;
5) $9x+6y=1$.

192. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $K(2; -3)$ и параллельна прямой $y=-3x+1$.

193. Запишите уравнение прямой, изображенной на рисунке 44.

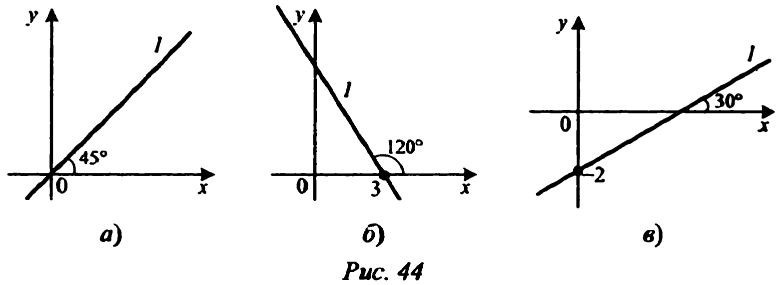


Рис. 44

Понятие вектора

194. На рисунке 45 изображен вектор $\overrightarrow{DK}$. Укажите начало и конец этого вектора. Отложите от точки F вектор, равный вектору $\overrightarrow{DK}$, и вектор, противоположно направленный с вектором $\overrightarrow{DK}$, модуль которого равен модулю вектора $\overrightarrow{DK}$.

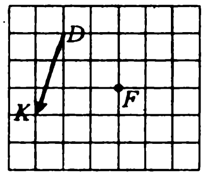


Рис. 45

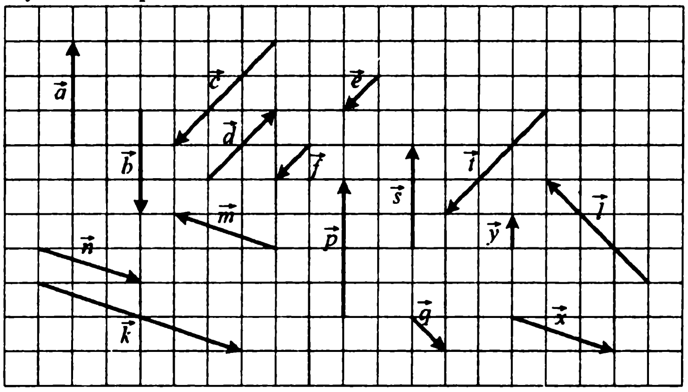


Рис. 46

195. Какие из векторов, изображенных на рисунке 46: 1) равны; 2) сонаправлены; 3) противоположно направлены; 4) коллинеарны; 5) имеют равные модули?

196. Четырехугольник $MKPE$ — параллелограмм (рис. 47). Укажите вектор, равный вектору: 1) $\overrightarrow{KP}$; 2) $\overrightarrow{PK}$; 3) $\overrightarrow{KM}$; 4) $\overrightarrow{MO}$; 5) $\overrightarrow{PO}$; 6) $\overrightarrow{OE}$.

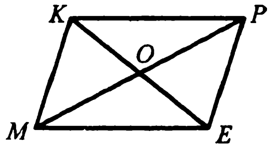


Рис. 47

197. В ромбе $ABCD$ $AB = 10$ см, $AC = 12$ см, O — точка пересечения диагоналей. Найдите: 1) $|\overrightarrow{BC}|$; 2) $|\overrightarrow{AO}|$; 3) $|\overrightarrow{BD}|$; 4) $|\overrightarrow{DO}|$.

Координаты вектора

198. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{PK}$, если:

1) $P(3; -4)$, $K(-1; 5)$;
2) $P(-4; 0)$, $K(0; -4)$;
3) $P(6; 9)$, $K(0; 0)$;
4) $P(a; b)$, $K(c; d)$.

199. Даны точки $D(5;-4)$, $E(-3;-5)$, $F(x;y)$, $K(2;7)$. Найдите x и y, если $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FK}$.

200. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ (рис. 48).

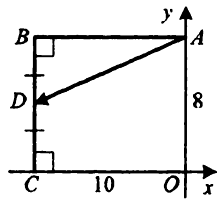


Рис. 48

201. Точка $K(-8;3)$ — конец вектора $\vec{a}(6;-9)$. Найдите координаты начала вектора.

202. Докажите, что четырехугольник $MNKP$ с вершинами в точках $M(-3;2)$, $N(-1;6)$, $K(6;7)$, $P(4;3)$ является параллелограммом.

203. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(4;-5)$, $B(2;3)$, $D(-3;-4)$. Найдите координаты вершины C.

204. Среди векторов $\vec{a}(5;-3)$, $\vec{b}(-6;8)$, $\vec{c}(4;-3)$, $\vec{d}(-3;-5)$, $\vec{e}(-\sqrt{21};2)$, $\vec{f}(7;-\sqrt{51})$ найдите те, которые имеют равные модули.

205. Модуль вектора $\vec{m}(-5;y)$ равен 13. Найдите y.

206. Модуль вектора $\vec{n}(x;y)$ равен $\sqrt{5}$, а координата x этого вектора больше координаты y на 1. Найдите координаты вектора $\vec{n}$.

207. Две вершины прямоугольника $MNPK$ — точки $M(-2;4)$ и $N(-2;7)$, а модуль вектора $\overrightarrow{NK}$ равен 5. Найдите координаты точек P и K.

Сложение и вычитание векторов

208. С помощью правила треугольника постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 49.

209. С помощью правила параллелограмма постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 49, *а*), *б*), *в*).

210. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 49, постройте вектор $\vec{a}-\vec{b}$.

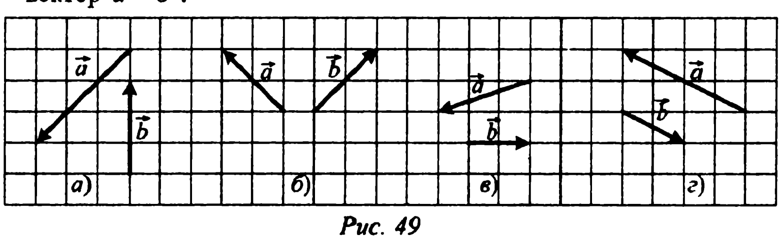


Рис. 49

211. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат, O — точка пересечения его диагоналей. Среди данных пар векторов укажите пары противоположных векторов:

1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$; 5) $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$;

2) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$; 4) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$; 6) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DB}$.

212. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Найдите:

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$.

2) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DB}$;

213. Может ли быть нулевым вектором сумма трех векторов, модули которых равны:

1) 5; 2; 3; 2) 4; 6; 3; 3) 8; 9; 18?

214. Даны векторы $\vec{c}(-3;1)$ и $\vec{d}(5;-6)$. Найдите:

1) $\vec{c}+\vec{d}$; 2) $\vec{c}-\vec{d}$; 3) $\left|\vec{c}+\vec{d}\right|$; 4) $\left|\vec{d}-\vec{c}\right|$.

215. Даны точки $M(0;5)$ и $N(-6;0)$. Найдите координаты точки K такой, что $\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{KN}=\vec{0}$.

216. Найдите координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если их сумма имеет координаты (–4; 5), а разность — (3; 7).

217. Может ли модуль суммы двух ненулевых векторов быть меньше, чем сумма их модулей?

218. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 50). Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\overrightarrow{AO}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{OD}=\vec{n}$.

219. Постройте такие ненулевые векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, что $\left|\vec{m}\right|=\left|\vec{n}\right|=\left|\vec{m}-\vec{n}\right|$.

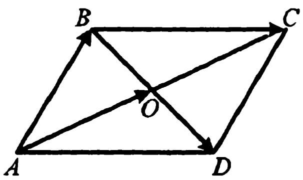


Рис. 50

220. Даны векторы $\vec{m}(-2;4)$, $\vec{n}(3;1)$, $\vec{k}(x;-1)$. При каком значении x модуль вектора $\vec{m}-\vec{n}-\vec{k}$ будет принимать наименьшее значение?

221. Найдите геометрическое место точек $M(x;y)$ координатной плоскости таких, что для точек $C(5;-6)$ и $D(-3;-4)$ выполняется равенство:

1) $\left|\overrightarrow{DC}\right|=2\left|\overrightarrow{MC}\right|$; 2) $\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DC}\right|=\sqrt{3}\left|\overrightarrow{CD}\right|$.

Умножение вектора на число

222. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 51). Постройте вектор:

1) $\frac{3}{4}\vec{a}$; 2) $-3\vec{b}$; 3) $-\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$.

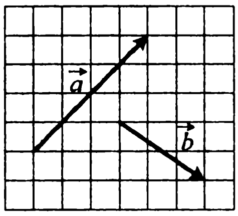


Рис. 51

223. Постройте два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметьте произвольную точку и отложите от нее вектор:

1) $-2\vec{a}-3\vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

224. Известно, что $\left|\vec{b}\right|=1{,}6$. Чему равен модуль вектора: 1) $-2\vec{b}$; 2) $\frac{1}{4}\vec{b}$?

225. Даны векторы $\vec{a}(4;-7)$ и $\vec{b}(-3;6)$. Найдите координаты вектора:

1) $3\vec{a}+\vec{b}$; 2) $4\vec{a}+6\vec{b}$; 3) $\vec{b}-4\vec{a}$; 4) $3\vec{b}-5\vec{a}$.

226. Вычислите модуль вектора $\vec{a}=4\vec{c}$, где $\vec{c}(5;-12)$.

227. Найдите модуль вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}$, где $\vec{a}(-4;2)$; $\vec{b}(1;-2)$.

228. Точки K и P — середины сторон AB и BC трапеции $ABCD$ (рис. 52). Выразите вектор $\overrightarrow{KP}$ через векторы $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$.

229. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ отмечены такие точки E и F соответственно, что $AE=\frac{5}{6}AB$, $BF=\frac{2}{3}BC$ (рис. 53). Выразите:

1) векторы $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{DF}$ через векторы $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{DC}=\vec{b}$;

2) векторы $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DC}$ через векторы $\overrightarrow{DE}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{DF}=\vec{n}$.

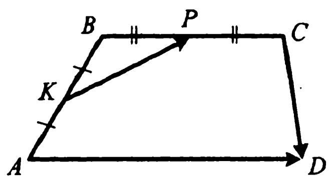


Рис. 52

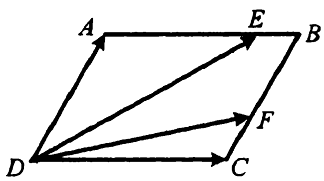


Рис. 53

230. Известно, что D — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $MKPF$, $MD:DP=4:9$, $KD:DF=7:3$. Выразите векторы $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{PF}$ и $\overrightarrow{FM}$ через векторы $\overrightarrow{KD}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{MD}=\vec{p}$.

231. На сторонах DF и EF треугольника DEF отмечены такие точки P и K соответственно, что $DP:PF=1:4$, $EK:KF=4:3$. Выразите:

1) векторы $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{KD}$ и $\overrightarrow{PE}$ через векторы $\overrightarrow{DP}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{FK}=\vec{n}$;

2) векторы $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{PF}$ через векторы $\overrightarrow{KD}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{PE}=\vec{n}$.

232. Точки E и K — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

233. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A(2;-5)$, $B(1;4)$, $C(-4;-6)$, $D(-2;0)$?

234. Среди векторов $\vec{m}(4;-3)$, $\vec{n}(-8;6)$, $\vec{p}(12;-9)$, $\vec{k}(-0{,}8;0{,}6)$ найдите сонаправленные и противоположно направленные векторы.

235. Найдите значение n, при котором векторы $\vec{a}(n;-8)$ и $\vec{b}(-4;-2)$ коллинеарны.

236. Найдите координаты вектора, модуль которого равен 1 и который сонаправлен с вектором:

1) $\vec{a}(-6;8)$; 2) $\vec{b}(8;-15)$; 3) $\vec{c}(p;-k)$.

237. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, коллинеарного вектору $\vec{p}(12;-5)$, если $|\vec{c}|=26$.

238. Даны вектор $\vec{c}(3;-2)$ и точка $M(-4;5)$. Найдите координаты точки F такой, что векторы $\vec{c}$ и $\overrightarrow{FM}$ противоположно направлены, а модуль вектора $\overrightarrow{FM}$ в 2 раза больше модуля вектора $\vec{c}$.

239. Докажите, что четырехугольник $MPFK$ с вершинами в точках $M(-2;3)$, $P(4;6)$, $F(4;1)$ и $K(-4;-3)$ является трапецией.

240. Лежат ли точки $D(4;-2)$, $E(5;1)$ и $F(7;-1)$ на одной прямой?

241. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), $BC=4$, $AD=9$, M — точка пересечения продолжений боковых сторон. Найдите такое число x, что:

1) $\overrightarrow{BM}=x\cdot\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{MC}=x\cdot\overrightarrow{DM}$.

242. Даны векторы $\vec{a}(2;-4)$, $\vec{b}(3;-5)$ и $\vec{k}(5;-7)$. Найдите такие числа x и y, что $\vec{k}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

Скалярное произведение векторов

243. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=30°$;

2) $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$;

3) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=12$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=0°$.

244. Диагонали квадрата $ABCD$ со стороной 4 см пересекаются в точке O. Найдите скалярное произведение векторов:

1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BD}$; 5) $\overrightarrow{DO}$ и $\overrightarrow{CO}$;

2) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{AO}$; 4) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$; 6) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

245. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$.

Найдите:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}$; 3) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$; 4) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{b}$.

246. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$.

Вычислите скалярное произведение $(3\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$.

247. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}$ (2; –1), $\vec{b}$ (4; 3); 3) $\vec{a}$ (6; –3), $\vec{b}$ (2; 4).

2) $\vec{a}$ (–3; 4), $\vec{b}$ (3; –2);

248. Даны векторы $\vec{m}(5;-y)$ и $\vec{b}(4;6)$. При каком значении y $\vec{m}\cdot\vec{b}=-18$?

249. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}(4;-1)$ и $\vec{b}(-6;-8)$.

250. Найдите косинусы углов треугольника ABC, если $A(-1;\ 2)$, $B(3;\ 7)$, $C(2;\ -1)$. Определите вид треугольника.

251. Даны векторы $\vec{c}\,(x;6)$ и $\vec{d}\,(3;-2)$. При каком значении x векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ перпендикулярны?

252. Даны векторы $\vec{a}\,(8;y)$ и $\vec{c}\,(-6\,;3)$. При каких значениях y угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$: 1) острый; 2) прямой; 3) тупой?

253. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(-2;3)$, $B(2;7)$, $C(6;3)$, $D(2;-1)$ является квадратом.

254. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a}\,(2;-3)$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=-26$.

255. Найдите координаты вектора, перпендикулярного вектору $\vec{c}\,(3;-1)$, модуль которого в 2 раза больше модуля вектора $\vec{c}$.

256. Даны векторы $\vec{c}\,(1;-2)$ и $\vec{d}\,(3;\ 1)$. Найдите значение n, при котором векторы $n\vec{c}+\vec{d}$ и $\vec{c}$ перпендикулярны.

257. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}=3\vec{k}+\vec{p}$ и $\vec{b}=\vec{k}-2\vec{p}$, если $|\vec{k}|=|\vec{p}|=1$ и $\vec{k}\perp\vec{p}$.

258. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=135^\circ$. Найдите:

1) $|\vec{a}-\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}+3\vec{b}|$.

259. Найдите косинусы углов, которые образует вектор $\overrightarrow{CD}$, где $C(2;-5)$, $D(-3;7)$, с отрицательными направлениями координатных осей.

260. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ и $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(4\vec{a}+3\vec{b})=2$.

261. Найдите геометрическое место точек $M(x;y)$ координатной плоскости таких, что для точек $D(-2;4)$ и $E(3;5)$ выполняется равенство:

1) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EM}=2$; 3) $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{EM}=0$;

2) $(\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{EM})\cdot\overrightarrow{DE}=-1$; 4) $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{EM}=9$.

262. Составьте уравнение прямой, содержащей высоту BD треугольника ABC, если $A(-3; -1)$, $B(2; 4)$, $C(3; -2)$.

263. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отметили точки E и F соответственно такие, что $BE : EC = 2 : 1$, $CF : FD = 5 : 1$. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

264. Докажите с помощью векторов, что средняя линия треугольника параллельна его стороне и равна половине этой стороны.

Параллельный перенос

265. Постройте образ треугольника ABC при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 54).

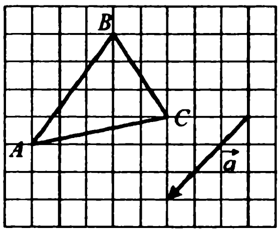


Рис. 54

266. Найдите точки, являющиеся образами точек $M(4; -2)$, $N(-2; 0)$, $K(0; -6)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(-4; 2)$. Образами каких точек при таком параллельном переносе являются точки $D(-6; -9)$, $E(0; -4)$, $F(11; 0)$?

267. При параллельном переносе образом точки $M(-8; 6)$ является точка $T(3; -7)$. Какая точка является образом точки $Q(-1; -9)$ при этом параллельном переносе?

268. Найдите вектор, при параллельном переносе на который образом точки $F(-6; 4)$ будет точка $K(3; -2)$, и вектор, при параллельном переносе на который образом точки K будет точка F.

269. Постройте образы точек $D(-4; 2)$, $E(0; 3)$ и $F(-2; 0)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{b}(-3; 0)$. Запишите координаты построенных точек.

270. Точка $M(-5; 9)$ — середина отрезка AB, $A(3; 5)$. При параллельном переносе образом точки B является точка $B_1(4; -7)$. Найдите координаты точек, являющихся образами точек A и M.

271. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(3; -2)$, $B(0; 1)$, $C(-3; 4)$. Осуществили параллельный перенос, при котором образом точки A является точка B. Каковы координаты вершин полученного треугольника? Сделайте рисунок.

272. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, точки D и E — середины сторон AB и BC соответственно. Существует ли параллельный перенос, при котором: 1) сторона BC является образом стороны AB; 2) отрезок AC является образом отрезка DE;

3) отрезок AD является образом отрезка BD? В случае утвердительного ответа укажите вектор, на который должен осуществляться параллельный перенос.

273. Запишите уравнение окружности, являющейся образом окружности $(x+3)^2+(y-4)^2=11$ при параллельном переносе на вектор $\vec{b}(-4;1)$.

274. Выполнен параллельный перенос прямой $3x-4y=5$. Запишите уравнение полученной прямой, если она проходит через точку: 1) $O(0;\ 0)$; 2) $K(3;\ -2)$.

Осевая симметрия

275. Даны прямая l и точка M, ей не принадлежащая. Постройте точку, симметричную точке M относительно прямой l.

276. Постройте образы отрезков AB и CD, изображенных на рисунке 55, при симметрии относительно прямой m.

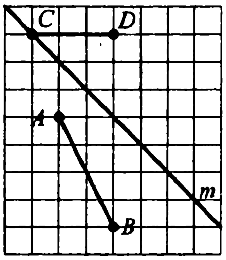


Рис. 55

277. Начертите равносторонний треугольник со стороной 3 см, проведите прямую, проходящую через одну из его вершин. Постройте треугольник, симметричный данному относительно этой прямой.

278. Какие условия должны выполняться, чтобы прямая l была осью симметрии некоторой другой прямой?

279. На рисунке 56 $AB = AD$, $BC = CD$. Докажите, что точки B и D симметричны относительно прямой AC.

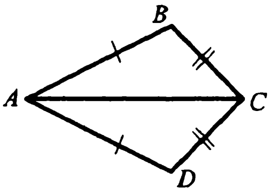


Рис. 56

280. Докажите, что если треугольник имеет две оси симметрии, то он является равносторонним.

281. Сколько осей симметрии имеет: 1) квадрат; 2) прямая; 3) отрезок?

282. Точки A и B лежат на одинаковом расстоянии от прямой l. Можно ли утверждать, что эти точки симметричны относительно прямой l?

283. Начертите четырехугольник так, чтобы прямые, которым принадлежат диагонали четырехугольника, были его осями симметрии.

284. Может ли диагональ трапеции, быть ее осью симметрии? Ответ обоснуйте.

285. Прямые l и m, проходящие через середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, — его оси симметрии (рис. 57). Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

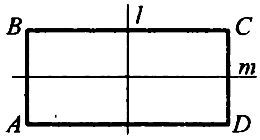


Рис. 57

286. Найдите координаты точек, симметричных точке $M(-2; 5)$ относительно осей координат.

287. Найдите x и y, если точки $A(3; y)$ и $B(x; -4)$ симметричны относительно оси абсцисс.

288. Постройте точки, симметричные точкам $M(1; -2)$, $N(0; -1)$ и $K(-3; 0)$ относительно: 1) оси x; 2) оси y; 3) прямой, содержащей биссектрисы II и IV координатных углов. Запишите координаты полученных точек.

289. Осями симметрии ромба являются прямые $x = -2$ и $y = 1$. Двумя его соседними вершинами являются точки $A(-2; 3)$ и $B(2; 1)$. Найдите координаты остальных вершин ромба.

290. Оси симметрии прямоугольника лежат на координатных осях. Координаты одной из его вершин $(2; -3)$. Найдите координаты вершин ромба, для которого вершины данного прямоугольника являются серединами сторон.

291. Постройте ромб $ABCD$, у которого диагональ AC данной длины m лежит на данной прямой, а вершины B и D лежат на двух других данных прямых.

292. Постройте квадрат, у которого две противоположные вершины лежат на данной прямой, а две другие — на двух данных окружностях.

Центральна симметрия

293. Даны точки A и B. Постройте точку B_1, симметричную точке B относительно точки A.

294. Даны отрезок AB и точка O, принадлежащая этому отрезку и не являющаяся его серединой. Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно точки O.

295. Дан луч AB. Постройте луч, симметричный данному относительно точки A.

296. Даны угол ABC и точка O, принадлежащая лучу BA. Постройте угол, симметричный углу ABC относительно точки O.

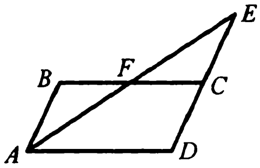


Рис. 58

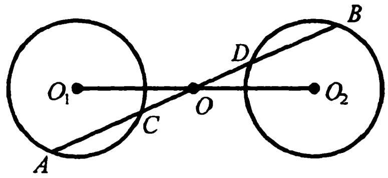


Рис. 59

297. Имеет ли центр симметрии: 1) окружность; 2) острый угол; 3) пара параллельных прямых? В случае утвердительного ответа укажите центр симметрии.

298. Может ли образом луча при центральной симметрии быть этот же луч?

299. Точки A и E симметричны относительно точки F, лежащей на стороне BC параллелограмма $ABCD$ (рис. 58). Докажите, что точки E и D симметричны относительно точки C.

300. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей с равными радиусами (рис. 59). Точка O является серединой отрезков AB и CD. Докажите, что данные окружности симметричны относительно точки O.

301. Докажите, что если четырехугольник имеет центр симметрии, то он — параллелограмм.

302. Найдите точку, симметричную точке $A(-7; 3)$ относительно начала координат.

303. Среди точек $A(2;3)$, $B(3;2)$, $C(-2;-3)$, $D(-3;2)$, $E(2;-3)$ и $F(-2;3)$ укажите пары точек, симметричных относительно начала координат.

304. Симметричны ли точки $A(-3; 6)$ и $B(5; 4)$ относительно точки $Q(-1; 5)$?

305. Найдите координаты центра симметрии точек $A(-3;8)$ и $B(-9;6)$.

306. Найдите координаты точки C, симметричной точке $A(2;-4)$ относительно точки $B(3; 5)$.

307. Точки $A(5;y)$ и $B(x;-7)$ симметричны относительно точки $P(3; -8)$. Найдите x и y.

308. Запишите уравнение окружности, симметричной окружности $(x-2)^2+(y+3)^2=7$ относительно:

1) начала координат; 2) точки $M(0; 3)$.

309. Запишите уравнение прямой, симметричной прямой $3x-4y=9$ относительно: 1) начала координат; 2) точки $M(-1; -2)$.

310. Постройте отрезок, серединой которого является данная точка, а концы принадлежат данной окружности и данной прямой.

311. Даны две окружности равных радиусов, касающиеся внешним образом. Докажите, что окружности отсекают на любой прямой, проходящей через точку касания и отличной от их общей касательной, равные отрезки.

Поворот

312. Даны точки M и O. Постройте образ точки M при повороте вокруг точки O: 1) против часовой стрелки на угол 70°; 2) по часовой стрелке на угол 110°.

313. Даны отрезок AB и точка O, ему не принадлежащая. Постройте образ отрезка AB при повороте вокруг точки O на угол 60° против часовой стрелки.

314. Точка O — центр правильного треугольника ABC (рис. 60). Укажите образы точек A, M, O, стороны AC, отрезка OK при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол 120°.

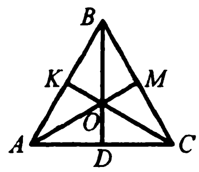


Рис. 60

315. Дан луч OA. Постройте образ этого луча при повороте на угол 50° по часовой стрелке вокруг: 1) точки M, принадлежащей лучу; 2) точки F, не принадлежащей лучу.

316. Постройте точки, являющиеся образами точек $A(2; -1)$, $B(-3; 2)$, $D(0; -3)$, $E(6; 0)$ при повороте на угол 90° против часовой стрелки вокруг начала координат. Укажите координаты полученных точек.

317. Образом точки $A(a; -2)$ при повороте вокруг начала координат на угол 90° по часовой стрелке является точка $B(b; 3)$. Найдите a и b.

318. На какой наименьший угол надо повернуть отрезок вокруг его середины, чтобы его образом был этот же отрезок?

319. В данный квадрат впишите другой квадрат с данной стороной.

320. Постройте равносторонний треугольник, одной из вершин которого является данная точка, принадлежащая данному углу, но не принадлежащая его сторонам, а две другие вершины принадлежат сторонам этого угла.

321. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, вершиной прямого угла которого является данная точка, а две другие вершины принадлежат данным окружностям.

322. Постройте квадрат, центром которого является данная точка, а две соседние вершины принадлежат данной прямой и данной окружности.

323. Постройте квадрат с центром в данной точке так, чтобы середины двух его соседних сторон принадлежали двум данным окружностям.

Гомотетия. Подобие фигур

324. Начертите отрезок DC длиной 4 см и отметьте точку M, не принадлежащую этому отрезку. Постройте отрезок, гомотетичный отрезку DC с центром гомотетии в точке M и коэффициентом: 1) $k=\frac{1}{2}$; 2) $k=-3$.

325. Начертите острый угол и отметьте точку F, лежащую на одной из сторон данного угла. Постройте угол, гомотетичный данному с центром гомотетии в точке F и коэффициентом $k=2$.

326. Постройте прямоугольник, гомотетичный данному прямоугольнику с центром гомотетии в точке пересечения его диагоналей и коэффициентом гомотетии: 1) $k=3$; 2) $k=-\frac{1}{2}$.

327. Отметьте точки P и D. Найдите такую точку M, чтобы точка P была образом точки D при гомотетии с центром M и коэффициентом $k=\frac{1}{4}$.

328. При гомотетии с центром в начале координат образом точки $F(-4; 6)$ является точка $C(-12; 18)$. Найдите коэффициент гомотетии.

329. Сколько существует гомотетий, при которых два данных параллельных отрезка гомотетичны?

330. Могут ли два треугольника быть гомотетичными и равными?

331. Стороны двух квадратов относятся как $4:5$. Как относятся их площади?

332. Высота одного равностороннего треугольника равна стороне другого. Как относятся их площади?

333. Средние линии делят данный треугольник на четыре треугольника. Площадь одного из этих треугольников равна 5 см^2. Найдите площадь данного треугольника.

334. Стороны двух правильных треугольников относятся как 4 : 7, а площадь большего из них равна 98 см^2. Найдите площадь меньшего треугольника.

335. Площадь многоугольника равна 60 см^2. Найдите площадь подобного ему многоугольника, если соответствующие стороны этих многоугольников равны 8 см и 12 см. Сколько решений имеет задача?

336. Прямая, параллельная стороне треугольника, делит его на две равновеликие фигуры. Найдите периметр треугольника, который отсекает эта прямая от данного треугольника, если периметр данного треугольника равен 28 см.

337. Медиана треугольника равна 9 см. Прямая, параллельная медиане, делит треугольник на две фигуры, площади которых относятся как 1 : 17. Найдите длину отрезка этой прямой, содержащегося между сторонами треугольника.

338. Точка K делит сторону BC квадрата $ABCD$ в отношении 3 : 2, считая от точки B. Отрезки AC и DK пересекаются в точке F. Найдите площадь треугольника CFK, если площадь треугольника ADF равна 50 см^2.

339. Проведите отрезок, параллельный медиане данного треугольника, так, чтобы он отсекал от него треугольник, площадь которого равна $\frac{1}{32}$ площади данного треугольника.

340. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Высоту, проведенную к наибольшей стороне, поделили в отношении 2 : 3, считая от вершины, и через точку деления провели прямую, параллельную наибольшей стороне. Найдите площадь образовавшейся при этом трапеции.

341. В данный треугольник впишите квадрат так, чтобы две вершины квадрата лежали на одной стороне треугольника, а две другие — на двух других сторонах треугольника.

Прямые и плоскости в пространстве

342. Сколько различных плоскостей можно провести через данную прямую?

343. Сколько различных плоскостей можно провести через три точки, не лежащие на одной прямой?

344. Можно ли утверждать, что две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой: 1) на плоскости; 2) в пространстве?

345. Точка M не лежит в плоскости треугольника DEF. Каково взаимное расположение прямых MD и EF?

346. Прямые a и b параллельны. Прямая c пересекает прямую a. Верно ли утверждение, что прямая c обязательно пересекает прямую b?

347. Через точку A, не принадлежащую плоскости α, проведена прямая, параллельная плоскости α. Сколько существует в плоскости α прямых, параллельных прямой a?

348. Прямые a и b параллельны плоскости α. Могут ли прямые a и b пересекаться?

349. Плоскости α и β параллельны прямой a. Верно ли утверждение, что плоскости α и β параллельны?

350. Прямая a перпендикулярна прямой b, лежащей в плоскости α. Обязательно ли прямая a перпендикулярна плоскости α?

351. Из точки D опущен перпендикуляр DE на плоскость β, точка F принадлежит плоскости β. Найдите:

1) DF, если $DE = 5$ см, $EF = 12$ см;

2) EF, если $\angle DFE = 45°$, $EF = 7\sqrt{2}$ см.

352. Из точки M опущен перпендикуляр MD на плоскость β, точки K и C принадлежат плоскости β. $DK = 6$ см, $\angle MKD = 60°$, $\angle MCD = 30°$. Найдите длину отрезка MC.

353. Из точки M опущен перпендикуляр MO на плоскость α, точки C и D принадлежат плоскости α, $MC = 10$ см, $MD = 17$ см, отрезок DO на 9 см больше отрезка CO. Найдите длину перпендикуляра MO.

Прямая призма

354. На рисунке 61 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите:

1) ребра, параллельные ребру AA_1;

2) ребра, скрещивающиеся с ребром AB;

3) ребра, параллельные грани AA_1B_1;

4) ребра, перпендикулярные грани ABC.

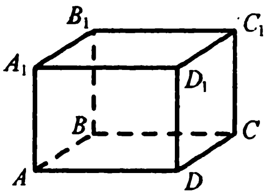


Рис. 61

355. Найдите площадь поверхности и объем куба с ребром 5 см.

356. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда (рис. 61), если $AB = 5$ см, $AD = 6$ см, $BB_1 = 4$ см.

357. Основанием прямой призмы является параллелограмм, стороны которого равны 5 см и 6 см, а тупой угол — 150°. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 8 см.

358. Основанием прямой призмы является квадрат со стороной 4 см, а ее боковое ребро равно 3 см. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы.

359. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник с основанием 8 см и боковой стороной 5 см. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 12 см.

360. Основанием прямой призмы является прямоугольная трапеция, основания которой равны 10 см и 15 см, а боковая сторона — 17 см. Найдите площадь поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 6 см.

Пирамида

361. На рисунке 62 изображена пирамида $MDEF$. Назовите:

1) основание пирамиды;
2) вершину пирамиды;
3) боковые ребра пирамиды;
4) боковые грани пирамиды.

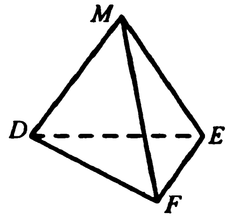


Рис. 62

362. Все боковые грани пирамиды — правильные треугольники со стороной 4 см, а ее основанием является квадрат. Найдите площадь поверхности пирамиды.

363. Вычислите площадь поверхности треугольной пирамиды, развертка которой изображена на рисунке 63 (длины отрезков даны в сантиметрах).

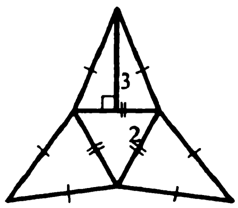


Рис. 63

364. Боковые ребра DA, DB и DC треугольной пирамиды $DABC$ равны, $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 60°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AD = 4$ см.

365. В основании пирамиды лежит правильный шестиугольник со стороной 2 см. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 10 см.

366. Найдите объем пирамиды, основание которой — квадрат со стороной 5 см, а высота пирамиды равна 4 см.

367. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник DKP, $DK = DP = 17$ см. Найдите объем пирамиды, если высота DE треугольника DKP равна 8 см, а высота пирамиды —6 см.

Цилиндр

368. На рисунке 64 изображен цилиндр. Назовите отрезок, являющийся:
1) образующей цилиндра;
2) радиусом нижнего основания цилиндра;
3) радиусом верхнего основания цилиндра.
Какая прямая является осью цилиндра?

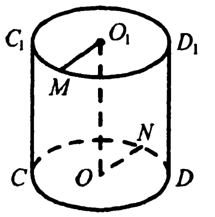


Рис. 64

369. Радиус основания цилиндра равен 6 см, а его образующая — 5 см. Найдите площадь поверхности и объем цилиндра.

370. Прямоугольник, стороны которого равны 12 см и 8 см, вращается вокруг меньшей стороны. Найдите площадь поверхности и объем полученного цилиндра.

Конус

371. На рисунке 65 изображен конус. Назовите отрезок, являющийся:
1) высотой конуса;
2) образующей конуса;
3) радиусом основания конуса.

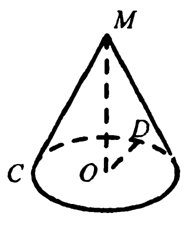


Рис. 65

372. Радиус основания конуса равен 12 см, а высота конуса — 5 см. Найдите площадь поверхности и объем конуса.

373. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 24 см и 10 см, вращается вокруг большего катета. Найдите площадь поверхности и объем полученного конуса.

374. Катеты прямоугольного треугольника равны m и n. Он вращается сначала вокруг одного катета, а затем вокруг другого. Найдите отношение площадей боковых поверхностей полученных конусов.

Шар

375. Найдите площадь поверхности и объем шара, радиус которого равен 7 см.

376. Полукруг, диаметр которого равен 6 см, вращается вокруг этого диаметра. Найдите площадь поверхности и объем полученного шара.

377. Радиус шара уменьшили в 4 раза. Как при этом изменились площадь поверхности и объем шара?

Вариант 3

Синус, косинус и тангенс угла от 0° до 180°

1. Чему равен:

1) $\sin(180° - \alpha)$, если $\sin\alpha = \frac{3}{8}$;

2) $\cos(180° - \alpha)$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{14}$;

3) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 4{,}2$?

2. Найдите значение выражения:

1) $5\operatorname{tg}0° + 3\cos180°$;

2) $9\sin90° - \operatorname{tg}180°$;

3) $\sin^2 24° + \cos^2 24°$;

4) $\sin150°\cos135°\operatorname{tg}120°$;

5) $\cos^2 65° + \sin^2 115°$;

6) $\frac{\operatorname{tg}46°}{\operatorname{tg}134°}$.

3. Сравните с нулем значение выражения:

1) $\cos14°\operatorname{tg}102°$;

2) $\cos175°\sin180°\operatorname{tg}12°$.

4. Найдите:

1) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{7}$;

2) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{6}$ и $0° \le \alpha \le 90°$;

3) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{8}$.

Теорема косинусов

5. Найдите сторону *AB* треугольника *ABC*, если:

1) $BC = 5$ см, $AC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$;

2) $BC = 8$ см, $AC = 11$ см, $\angle C = 120°$.

6. Найдите косинусы углов треугольника, стороны которого равны 9 см, 10 см и 15 см.

7. Две стороны треугольника равны 5 см и 8 см, а синус угла между ними равен $\frac{8}{15}$. Найдите третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?

8. Определите вид треугольника, стороны которого равны:

1) 5 см, 8 см, 10 см; 2) 9 см, 10 см, 12 см; 3) 25 см, 24 см, 7 см.

9. Стороны параллелограмма равны 7 см и $6\sqrt{2}$ см, а угол между ними — 45°. Найдите диагонали параллелограмма.

10. На продолжении стороны AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) за точку B отметили точку M, а на продолжении стороны AC за точку C — точку N. Найдите длину отрезка MN, если $AC = 25$ см, $BC = 7$ см, $BM = 3$ см, $CN = 5$ см.

11. На продолжении стороны AC равностороннего треугольника ABC за точку C отметили точку D так, что отрезок CD равен медиане треугольника ABC. Найдите длину отрезка BD, если сторона треугольника ABC равна 3 см.

12. Одна сторона треугольника на 4 см меньше другой, а угол между ними равен 120°. Найдите периметр треугольника, если третья его сторона равна $\sqrt{79}$ см.

13. Две стороны треугольника относятся как $3\sqrt{2} : 7$, а угол между ними равен 45°. Найдите эти стороны, если третья сторона треугольника равна 30 см.

14. Две стороны треугольника равны 6 см и $\sqrt{76}$ см, а угол против большей из них — 120°. Найдите третью сторону треугольника.

15. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна b, а угол при основании — α. Найдите медиану треугольника, проведенную к его боковой стороне.

16. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Известно, что $BC = CD = a$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите разность сторон AB и AD.

17. Для сторон треугольника выполняется равенство $b^2 = a^2 + c^2 + ac\sqrt{2}$. Докажите, что угол против стороны b равен 135°.

18. Стороны треугольника равны 7 см и 10 см, а угол между ними — 45°. Найдите медиану треугольника, проведенную к его третьей стороне.

19. Найдите диагонали параллелограмма, если их длины относятся как 9 : 13, а стороны параллелограмма равны 15 см и 30 см.

20. Одна из сторон параллелограмма на 2 см меньше другой, а диагонали параллелограмма равны 6 см и 2 см. Найдите стороны параллелограмма.

21. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Найдите медиану треугольника, проведенную к его средней по длине стороне.

22. В треугольнике ABC $AC = 22$ см, $AB : BC = 7 : 12$, AK — медиана, $AK = 14$ см. Найдите стороны BC и AB.

23. Основание равнобедренного треугольника равно 10 см, а медиана, проведенная к боковой стороне, — 8 см. Найдите боковую сторону треугольника.

24. Медианы AM и CN треугольника ABC равны соответственно 6 см и 9 см, а угол BOC равен 120° (O — точка пересечения медиан). Найдите третью медиану треугольника.

25. Докажите, что если сумма квадратов диагоналей трапеции в 4 раза больше, чем квадрат ее средней линии, то диагонали трапеции перпендикулярны.

Теорема синусов

26. В треугольнике ABC $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$, $AB = 7\sqrt{2}$ см. Найдите сторону AC.

27. В треугольнике ABC $AB = 9\sqrt{3}$ см, $\angle B = 75°$, $\angle C = 60°$. Найдите сторону BC.

28. В треугольнике ABC $\angle A = 60°$, $AC = 2$ см, $BC = \sqrt{6}$ см. Найдите угол B.

29. В треугольнике ABC $AC = 4$ см, $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle B = 30°$. Найдите угол A. Сколько решений имеет задача?

30. В треугольнике ABC $AC = 8$ см, $BC = 15$ см. Может ли $\sin A$ быть равным $\frac{3}{5}$?

31. В треугольнике ABC $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найдите стороны AB и BC.

32. На рисунке 66 $\angle BAC = 90°$, $BC = a$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle DAC = \beta$, $\angle DCA = \varphi$. Найдите DC.

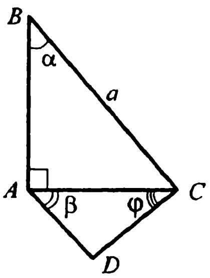


Рис. 66

33. Биссектриса прямоугольного треугольника, проведенная из вершины его прямого угла, равна l, а острый угол равен α. Найдите катеты треугольника.

34. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна a, диагональ BD образует со сторонами AB и AD углы α и β соответственно. Найдите вторую сторону и диагонали параллелограмма.

35. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна b, а угол при вершине равен α. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины угла при его основании.

36. Два угла треугольника равны α и β, а биссектриса треугольника, проведенная из вершины третьего угла, делит его сторону на отрезки a и b. Найдите эту биссектрису треугольника и его стороны.

37. На рисунке 67 $AC = CB$, $\angle ACB = 90°$, $\angle CBD = \alpha$, $\angle CDB = \beta$, $\angle DAB = \varphi$, $DC = a$. Найдите AD.

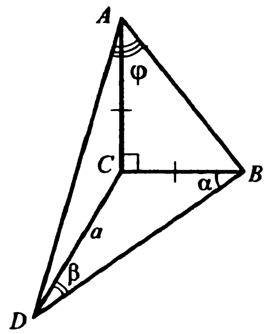


Рис. 67

38. Сумма сторон BC и AC треугольника ABC равна 2 см, $\angle A = 150°$, $\angle B = 45°$. Найдите стороны BC и AC треугольника.

39. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD. Докажите, что

$$CD^2 = \frac{AD \cdot BD \sin A \sin B}{\sin^2 \frac{C}{2}}.$$

40. Докажите, что если α, β, γ — углы некоторого треугольника, то существует треугольник, стороны которого равны $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$.

41. В треугольнике ABC $AC = 5\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

42. В треугольнике ABC $AC = 12$ см, $AB = 8$ см, $R = 4\sqrt{3}$ см, где R — радиус описанной окружности. Найдите сторону BC. Сколько решений имеет задача?

43. В треугольнике ABC отрезок BK — биссектриса, $\angle B = 30°$, $\angle A = 105°$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABK, равен $4\sqrt{6}$ см.

44. В треугольнике ABC H — точка пересечения высот. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AHB, если радиус окружности, описанной около треугольника AHC, равен 5 см.

45. Основание равнобедренного треугольника равно 70 см, а боковая сторона — 37 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

46. Основания равнобокой трапеции равны 2 см и 14 см, а боковая сторона — 10 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

47. В окружность, радиус которой равен 8 см, вписана трапеция, одно из оснований которой в 2 раза меньше каждой из остальных сторон. Найдите диагонали трапеции.

48. В треугольнике ABC O — точка пересечения биссектрис, $\angle C = 60°$. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и AOB, равны.

Решение треугольников

49. Найдите неизвестные стороны и углы треугольника ABC, если:

1) $AC = 10$ см, $\angle C = 26°$, $\angle B = 62°$;

2) $AB = 16$ см, $\angle A = 38°$, $\angle B = 49°$;

3) $AB = 15$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 65°$;

4) $AB = 7$ см, $BC = 11$ см, $\angle B = 96°$;

5) $AB = 9$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см;

6) $AB = 7$ см, $BC = 11$ см, $AC = 16$ см;

7) $AB = 18$ см, $BC = 20$ см, $\angle A = 110°$;

8) $AB = 12$ см, $BC = 15$ см, $\angle A = 50°$;

9) $AB = 14$ см, $BC = 9$ см, $\angle A = 25°$;

10) $AB = 28$ см, $BC = 12$ см, $\angle A = 35°$.

50. В треугольнике ABC $AC = CB = 10$ см, $\angle A = 70°$. Найдите: 1) сторону AB; 2) высоту BK; 3) медиану BM; 4) биссектрису AD; 5) радиус описанной окружности; 6) радиус вписанной окружности.

51. Диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 6 см, $\angle CAD = 42°$, $\angle BAD = 74°$. Найдите: 1) стороны трапеции; 2) радиус окружности, описанной около треугольника ABC; 3) радиус окружности, вписанной в треугольник COD (O — точка пересечения диагоналей трапеции).

52. Меньшая сторона треугольника, вписанного в окружность, равна 8 см, а вершины треугольника делят окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как 2 : 3 : 7. Найдите неизвестные стороны треугольника.

53. На сторонах треугольника ABC ($AC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \varphi$) вне его построены квадраты. Точки пересечения диагоналей этих квадратов последовательно соединены. Определите периметр полученного треугольника.

Формулы для нахождения площади треугольника

54. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 6 см и 5 см, а угол между ними равен: 1) 60°; 2) 135°.

55. Две стороны треугольника равны 5 см и 12 см. Может ли его площадь быть равной: 1) 24 см^2; 2) 30 см^2; 3) 42 см^2?

56. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°, а его площадь — $20\sqrt{3}$ см^2. Найдите стороны треугольника.

57. Отрезки AB и CD пересекаются в точке K (рис. 68), $AK = \frac{1}{2}KB$, $CK = 3KD$. Найдите отношение площадей треугольников AKC и BKD.

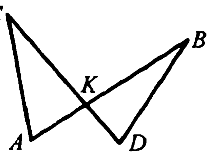


Рис. 68

58. На сторонах угла A отложены отрезки $AM = 6$ см, $AB = 10$ см, $AK = 3$ см, $AC = 12$ см (рис. 69). Найдите отношение площадей треугольников AMK и ABC.

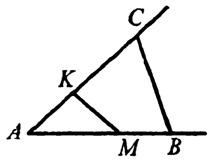


Рис. 69

59. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 3 см, 7 см и 8 см.

60. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки длиной 6 см и 10 см. Найдите площадь треугольника, если большая из двух остальных сторон равна 25 см.

61. Найдите наибольшую высоту треугольника, стороны которого равны 13 см, 14 см и 15 см.

62. Три окружности, радиусы которых равны 6 см, 2 см и 1 см, попарно касаются друг друга. Определите площадь треугольника, вершинами которого являются центры этих окружностей. Сколько решений имеет задача?

63. В треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см вписана окружность, центр которой соединен с вершинами треугольника. Найдите площади трех образовавшихся треугольников.

64. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 8 см и 14 см, а угол между ними — 45°.

65. Найдите площадь ромба, сторона которого равна $7\sqrt{2}$ см, а один из углов — 135°.

66. Среди всех параллелограммов с данными высотами h_1 и h_2 укажите параллелограмм, имеющий наибольшую площадь. Найдите эту площадь.

67. Углы ромба относятся как 2 : 1, а его сторона равна 6 см. Найдите площадь ромба.

68. Стороны прямоугольника и параллелограмма соответственно равны, а отношение их площадей равно 2. Найдите углы параллелограмма.

69. Стороны параллелограмма равны 7 см и 9 см. Может ли его площадь быть равной 64 см^2?

70. Высоты параллелограмма равны 14 см и 12 см, а угол между ними — 45°. Найдите площадь параллелограмма.

71. Площадь прямоугольника равна $36\sqrt{3}$ см^2, а угол между его диагоналями — 60°. Найдите стороны прямоугольника.

72. Площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны.

73. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABDK$ и $CBFN$ соответственно. Найдите площадь шестиугольника $AKDFNC$.

74. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Площади треугольников AMB, AMD и DMC соответственно равны 4 см^2, 12 см^2 и 9 см^2. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

75. В окружность вписан четырехугольник, стороны которого последовательно равны 7 см, 24 см, 20 см и 15 см. Найдите площадь четырехугольника.

Правильные многоугольники и их свойства

76. Существует ли пятиугольник, все стороны которого равны, который не является правильным?

77. Найдите углы правильного n-угольника, если n равно: 1) 6; 2) 24; 3) 10.

78. Найдите количество сторон правильного многоугольника, если: 1) его угол равен 164°; 2) его внешний угол равен 12°.

79. Определите количество сторон правильного многоугольника, угол которого в два раза больше внешнего угла многоугольника.

80. Сумма углов правильного многоугольника вместе с одним из внешних углов составляет 1125°. Найдите количество сторон многоугольника.

81. На рисунке 70 изображен правильный пятиугольник $ABCDE$, M — точка пересечения прямых AE и CD. Найдите угол AMC.

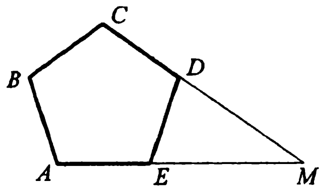


Рис. 70

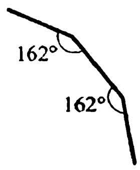


Рис. 71

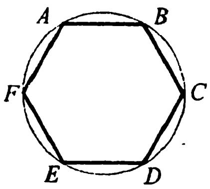


Рис. 72

82. На рисунке 71 изображены несколько последовательных сторон правильного многоугольника. Сколько сторон имеет этот многоугольник?

83. Найдите центральный угол правильного n-угольника, если n равно: 1) 5; 2) 8; 3) 40.

84. Центральный угол правильного многоугольника равен 20°. Найдите количество сторон многоугольника.

85. Какое наибольшее значение может принимать величина внешнего угла правильного многоугольника?

86. На рисунке 72 изображен правильный шестиугольник, вписанный в окружность. Как проще всего на этом рисунке построить правильный двенадцатиугольник, вписанный в эту окружность?

87. По данной стороне a постройте правильный пятиугольник.

88. Опишите около данной окружности правильный двенадцатиугольник.

89. Отрезки AB, BC и CD — три последовательные стороны правильного многоугольника. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M, $\angle BMC = 140°$. Найдите количество сторон многоугольника.

90. Окружность вписана в многоугольник, все углы которого равны. Могут ли быть неравными его стороны?

91. Середины сторон многоугольника соединили последовательно отрезками и получили правильный многоугольник. Можно ли утверждать, что данный многоугольник также правильный?

92. Сторона правильного треугольника равна 6 см. Найдите радиусы его вписанной и описанной окружностей.

93. Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен 8 см. Найдите сторону квадрата и радиус описанной около него окружности.

94. Радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен $5\sqrt{3}$ см. Найдите сторону шестиугольника и радиус вписанной в него окружности.

95. Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен 12 см, а радиус окружности, вписанной в него, — $6\sqrt{3}$ см. Найдите сторону многоугольника и количество его сторон.

96. Существует ли правильный многоугольник, у которого отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно 0,8?

97. Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна 4 см. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

98. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей правильного треугольника, если их сумма равна 12 см.

99. Один квадрат вписан в окружность, а другой — описан около нее. Найдите отношение сторон этих квадратов.

100. Квадрат вписан в окружность радиуса R. В этот квадрат вписана другая окружность, в которую вписан правильный треугольник. Найдите сторону этого треугольника.

101. Около правильного треугольника со стороной $2\sqrt{3}$ см описана окружность, а около окружности описан правильный шестиугольник, около которого описана окружность. Найдите радиус этой окружности.

102. Около окружности радиуса $4\sqrt{3}$ см описан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен другой правильный треугольник и в него вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

103. Середины сторон правильного восьмиугольника соединены через одну так, что полученной фигурой является квадрат. Найдите сторону восьмиугольника, если сторона квадрата равна 6 см.

104. Радиус окружности, вписанной в правильный восьмиугольник $ABCDEFKM$, равен 4 см. Найдите длины диагоналей AC, AD и AE.

105. Длина общей хорды двух окружностей равна 2 см. Для одной из окружностей эта хорда служит стороной правильного вписанного шестиугольника, а для другой — стороной вписанного квадрата. Найдите расстояние между центрами окружностей, если они лежат по разные стороны от хорды.

106. В квадрат со стороной a вписана окружность. Четыре маленькие окружности касаются этой окружности и двух сторон квадрата. Найдите радиусы маленьких окружностей.

107. Углы правильного треугольника срезали так, что получили правильный шестиугольник со стороной 5 см. Найдите сторону треугольника.

108. Около правильного восьмиугольника описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин восьмиугольника является величиной постоянной.

109. Выразите площадь правильного шестиугольника через длину его меньшей диагонали.

110. Вычислите площадь правильного шестиугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 4 см.

111. Найдите отношение сторон правильных треугольника, четырехугольника и шестиугольника, площади которых равны.

112. Сторона правильного шестиугольника равна 3 см. Его стороны, взятые через одну, продлили до пересечения так, что образовался правильный треугольник. Найдите площадь этого треугольника.

113. Сторона правильного треугольника равна 4 см. Около него описана окружность, а около окружности — правильный шестиугольник. Найдите площадь шестиугольника.

Длина окружности

114. Найдите длину окружности, радиус которой равен: 1) 3 см; 2) 8 см; 3) $\sqrt{\pi}$ см; 4) $\frac{5}{\pi}$ см.

115. Найдите длину окружности, диаметр которой на 3 см больше радиуса.

116. Чему равен радиус окружности, длина которой равна: 1) 4 см; 2) 6 см; 3) π^2 см; 4) $\frac{2}{\pi}$ см?

117. Как построить окружность, длина которой равна разности суммы длин двух данных окружностей и длины третьей данной окружности?

118. Радиус окружности уменьшили: 1) в 3 раза; 2) на 1 см. Как при этом изменилась длина окружности?

119. Отрезок AB длиной 10 см разделили на несколько отрезков (не обязательно равных). На каждом из полученных отрезков как на диаметре построили окружность. Найдите сумму длин полученных окружностей.

120. Груз поднимают с помощью блока (рис. 73). На сколько поднимется груз за 8 оборотов блока, если радиус блока равен 5 см?

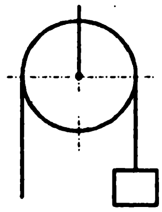


Рис. 73

121. Диаметр колеса автомобиля равен 0,9 м. Найдите его скорость, если колесо за одну минуту делает 250 оборотов. Ответ в километрах в час округлите до единиц.

122. Постройте график зависимости диаметра окружности от длины окружности.

123. Радиус окружности равен 8 см. Найдите длину дуги, содержащей: 1) 2°; 2) 20°; 3) 125°; 4) 240°; 5) 315°.

124. Длина дуги окружности равна 20 см, а ее градусная мера — 15°. Найдите радиус окружности.

125. Длина дуги окружности равна π см. Найдите градусную меру дуги окружности, если радиус окружности равен 40 см.

126. Начертите окружность радиусом 4 см. Отложите на ней дугу длиной 3π см.

127. Длина окружности, радиус которой 12 см, равна длине дуги второй окружности, содержащей 135°. Найдите радиус второй окружности.

128. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат со стороной a. На его сторонах как на диаметрах построены полуокружности (рис. 74). Найдите длину линии, ограничивающей заштрихованную фигуру.

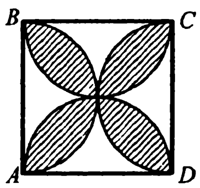


Рис. 74

129. На катете AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги этой окружности, расположенной внутри треугольника, если $\angle A = 40°$, $AC = 10$ см.

130. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$. Проведена окружность с центром в вершине B, которая касается стороны AC. Найдите длину дуги этой окружности, расположенной внутри треугольника.

131. В окружность, радиус которой равен 1, вписан правильный двенадцатиугольник, а около окружности описан правильный шестиугольник. Выполните рисунок и, пользуясь им, докажите, что $3 < \pi < 3{,}5$.

Площадь круга

132. Найдите площадь круга, радиус которого равен: 1) 6 см; 2) $\frac{5}{\pi}$ см; 3) $\frac{7}{\sqrt{\pi}}$ см.

133. Найдите с точностью до десятых радиус круга, площадь которого равна 16 см^2.

134. Площади двух кругов относятся как 4 : 9. Чему равно отношение их радиусов?

135. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна 10π см.

136. Площади двух кругов равны a см^2 и b см^2. Чему равно отношение длин соответствующих окружностей?

137. Найдите площадь круга, вписанного в правильный треугольник, площадь которого равна $4\sqrt{3}$ см^2.

138. Найдите отношение площадей вписанного и описанного кругов правильного треугольника.

139. Найдите площадь кольца, расположенного между двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны 3 см и 7 см.

140. Найдите площадь сектора круга, радиус которого 4 см, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: 1) 40°; 2) 100°; 3) 300°.

141. Какую часть площади круга составляет площадь сектора, если соответствующий сектору центральный угол равен: 1) 15°; 2) 110°; 3) 240°?

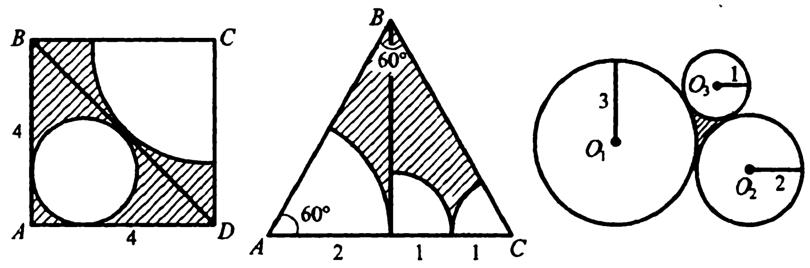
142. Площадь сектора составляет $\frac{9}{20}$ площади круга. Найдите градусную меру центрального угла, соответствующего данному сектору.

143. Найдите радиус круга, если площадь сектора этого круга равна 60 см^2, а центральный угол, соответствующий этому сектору, — 54°.

144. Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 10 см, а градусная мера дуги сегмента равна: 1) 45°; 2) 120°; 3) 240°.

145. Найдите площадь кругового сегмента, если его основание равно 8 см, а градусная мера дуги сегмента равна: 1) 60°; 2) 225°.

146. При каком условии объединением нескольких секторов круга является сегмент круга?



а) *б)* *в)*

Рис. 75

147. Найдите площади заштрихованных фигур, изображенных на рисунке 75 (длины отрезков даны в сантиметрах).

148. Стороны треугольника равны 20 см, 34 см и 42 см. Найдите отношение площадей описанного и вписанного в этот треугольник кругов.

149. Площадь круга, вписанного в равнобокую трапецию, равна 16π см^2, а тупой угол трапеции равен 150°. Найдите площадь трапеции.

150. Два круга имеют общую хорду. Найдите отношение площадей этих кругов, если из центра первого круга общая хорда видна под углом 60°, а из центра второго — под углом 90°.

151. Найдите площадь кругового кольца, содержащегося между описанной и вписанной окружностями квадрата со стороной 5 см.

152. Стороны треугольника равны 10 см, 17 см и 21 см. В треугольник вписан полукруг, центр которого лежит на большей стороне треугольника. Найдите площадь полукруга.

153. В полукруг, диаметр которого равен 10 см, вписана трапеция, большее основание которой совпадает с диаметром полукруга, а острый угол равен 60°. Найдите площадь части полукруга, находящейся вне трапеции.

154. Радиус круга равен 12 см. В нем проведена хорда, равная стороне правильного шестиугольника, вписанного в этот круг. Найдите площадь большего из сегментов, которые определяются этой хордой.

155. Найдите площадь круга, вписанного в сектор круга, радиус которого 4 см, с центральным углом, равным 120°.

156. Радиус круга равен 6 см. По одну сторону от центра круга проведены две параллельные хорды, одна из которых равна стороне правильного вписанного треугольника, а другая — стороне вписанного квадрата. Найдите площадь той части круга, которая содержится между хордами.

Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Координаты середины отрезка

157. Найдите расстояние между точками A и B, если:
1) $A(-1; 2)$, $B(-7; 10)$; 2) $A(2; -3)$, $B(2; 6)$; 3) $A(4; -1)$, $B(5; -2)$.

158. Докажите, что точки $A(1; 3)$, $B(-2; -3)$ и $C(3; 7)$ лежат на одной прямой. Какая из точек лежит между двумя другими?

159. Вершинами треугольника являются точки $A(-3; 1)$, $B(2; -5)$, $C(3; 6)$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

160. Расстояние между точками $A(x; -7)$ и $B(4; x)$ равно $\sqrt{101}$. Найдите x.

161. На прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов, найдите точку, равноудаленную от точек $A(1; 1)$ и $B(3; 5)$.

162. Найдите координаты середины отрезка AB, если:
1) $A(2; -7)$, $B(6; -3)$; 3) $A(-9; -5)$, $B(-1; 4)$.
2) $A(5; 11)$, $B(4; 3)$;

163. Точка M — середина отрезка KN. Найдите координаты точки K, если $N(-4; 5)$, $M(1; 2)$.

164. Найдите координаты точки, которая делит отрезок FN в отношении 1 : 7, считая от точки N, если $F(1; -3)$, $N(-7; 13)$.

165. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-3; 7)$, $B(2; -4)$, $C(5; 1)$, $D(0; 12)$ является параллелограммом.

166. Точки $B_1(-2; 3)$ и $A_1(5; -1)$ — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. Вершина B имеет координаты (1; 7). Найдите координаты вершин A и C.

167. Точки $A_1(-2; 1)$, $B_1(4; -3)$ и $C_1(-1; 5)$ — середины сторон треугольника. Найдите координаты его вершин.

168. В треугольнике ABC $A(1; -8)$, $B(3; -4)$, $C(2; -5)$. Найдите длину средней линии MN треугольника ABC, где точки M и N — середины сторон AC и AB соответственно.

169. Найдите длину отрезка, концы которого лежат на осях координат и серединой которого является точка $K(-5; 12)$.

170. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(2; 1)$, $B(5; -3)$, $C(9; 0)$ и $D(6; 4)$ является квадратом.

171. Найдите координаты вершины B равностороннего треугольника ABC, если известны координаты вершин $A(0; -1)$ и $C(0; 3)$.

Уравнение окружности

172. Определите по уравнению окружности координаты ее центра и радиус:

1) $(x+2)^2+(y-5)^2=49$; 3) $(x-6)^2+(y+15)^2=81$;

2) $(x+7)^2+(y+1)^2=36$; 4) $x^2+(y-9)^2=2$.

173. Составьте уравнение окружности, если известны координаты ее центра M и радиус R:

1) $M(1; -4)$, $R=2$; 2) $M(0; -5)$, $R=3$; 3) $M(1; -1)$, $R=\sqrt{11}$.

174. Составьте уравнение окружности, центр которой принадлежит оси абсцисс, радиус равен $\sqrt{26}$ и которая проходит через точку $A(1; -1)$.

175. Составьте уравнение окружности с центром в точке $M(1; -4)$, проходящей через точку $A(0; 3)$.

176. Составьте уравнение окружности, радиусом которой является отрезок MN, если $M(-3; 1)$, $N(1; 6)$. Сколько решений имеет задача?

177. Составьте уравнение окружности, которая касается обеих координатных осей и центр которой находится в точке $M(-3; 3)$.

178. Докажите, что данное уравнение является уравнением окружности, и укажите координаты центра и радиус этой окружности:

1) $x^2+y^2+6x-14y-5=0$; 2) $x^2+y^2+x=0$.

179. Найдите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $x^2+y^2-8x+2y+16=0$. Выясните положение точек $A(5; -1)$, $B(2; 4)$ и $C(4; -1)$ относительно этой окружности.

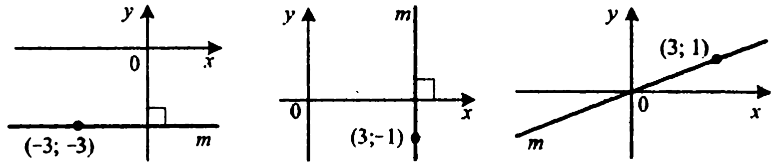
180. Выясните взаимное расположение двух окружностей:

1) $(x-6)^2+(y-2)^2=2$ и $(x-1)^2+(y-7)^2=4$;

2) $(x-7)^2+(y+5)^2=100$ и $(x-2)^2+(y+2)^2=1$;

3) $(x-8)^2+(y-4)^2=36$ и $(x-8)^2+(y-1)^2=9$;

4) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ и $(x-2)^2+(y-3)^2=5$.



а) *б)* *в)*

Рис. 76

Уравнение прямой

181. Найдите координаты точек пересечения прямой $5x-2y=-12$ с осями координат. Принадлежит ли этой прямой точка: 1) $A(-2;7)$; 2) $B(1;-2)$?

182. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2;1)$ и $B(3;-4)$.

183. Запишите уравнение прямой, изображенной на рисунке 76.

184. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $N(2;-9)$ и параллельной: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат.

185. Точки $A(-6;21)$, $B(1;-7)$ и $C(0;-4)$ — вершины треугольника ABC. Составьте уравнение прямой, содержащей медиану BM треугольника.

186. При каком значении m точки $A(2m;-3)$, $B(1;-2)$ и $C(3;4)$ лежат на одной прямой?

187. Найдите координаты точки пересечения прямых $4x-5y=2$ и $2x+7y=3$.

Угловой коэффициент прямой

188. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки:
1) $A(5;-4)$ и $B(1;-6)$; 3) $A(6;2)$ и $B(-7;2)$.
2) $A(1;1)$ и $B(-3;-3)$;

189. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $K(2;-3)$, угловой коэффициент которой равен: 1) 3; 2) −4; 3) 0.

190. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $A(1;-2)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол: 1) 30°; 2) 150°.

191. Среди прямых, заданных своими уравнениями, укажите пары параллельных:
1) $2x+3y=5$; 3) $8x+12y=9$; 5) $8x-6y=-7$.
2) $4x-3y=-1$; 4) $10x+15y=11$;

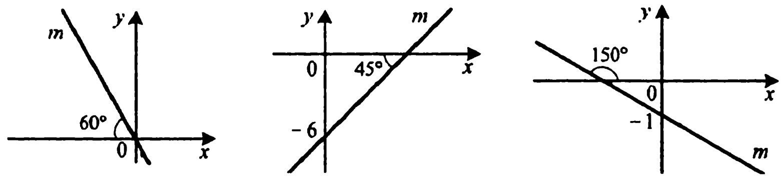


Рис. 77

192. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $M(4; -2)$ и параллельна прямой $y = 3x + 1$.

193. Запишите уравнение прямой, изображенной на рисунке 77.

Понятие вектора

194. На рисунке 78 изображен вектор $\overrightarrow{MB}$. Укажите начало и конец этого вектора. Отложите от точки F вектор, равный вектору $\overrightarrow{MB}$, и вектор, противоположно направленный с вектором $\overrightarrow{MB}$, модуль которого равен модулю вектора $\overrightarrow{MB}$.

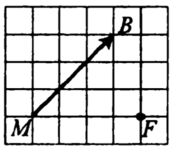


Рис. 78

195. Какие из векторов, изображенных на рисунке 79: 1) равны; 2) сонаправлены; 3) противоположно направлены; 4) коллинеарны; 5) имеют равные модули?

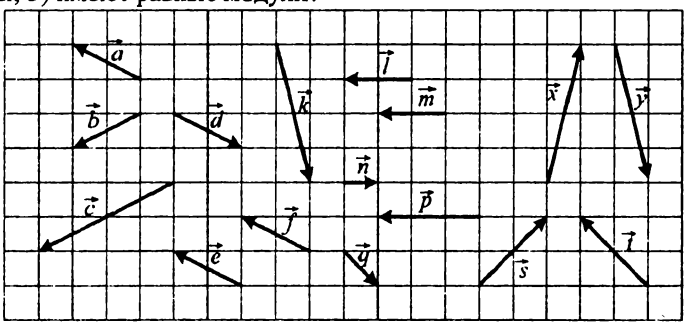


Рис. 79

196. Четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник (рис. 80). Укажите вектор, равный вектору: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{BA}$; 3) $\overrightarrow{DA}$; 4) $\overrightarrow{OC}$; 5) $\overrightarrow{OA}$; 6) $\overrightarrow{BO}$.

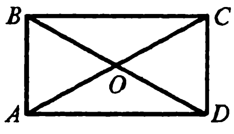


Рис. 80

197. Сторона квадрата $ABCD$ равна 4 см, O — точка пересечения диагоналей. Найдите:

1) $|\overrightarrow{AD}|$; 2) $|\overrightarrow{AC}|$; 3) $|\overrightarrow{BD}|$; 4) $|\overrightarrow{BO}|$.

Координаты вектора

198. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:
1) $A(3; -4)$, $B(9; -2)$;
2) $A(0; -2)$, $B(4; 0)$;
3) $A(-3; 3)$, $B(0; 0)$;
4) $A(x; y)$, $B(z; t)$.

199. Даны точки $A(4; -2)$, $B(x; 1)$, $C(5; y)$, $D(2; -3)$. Найдите x и y, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

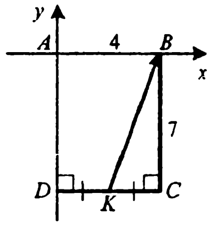


Рис. 81

200. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{KB}$ (рис. 81).

201. От точки $M(-2; 4)$ отложен вектор $\vec{n}(4; -6)$. Найдите координаты конца вектора.

202. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(3; -7)$, $B(2; 4)$, $C(-5; 1)$, $D(-4; -10)$ является параллелограммом.

203. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(1; 2)$, $B(-2; 4)$, $C(7; -1)$. Найдите координаты вершины D.

204. Среди векторов $\vec{a}(8; -6)$, $\vec{b}(1; -7)$, $\vec{c}(\sqrt{10}; 3\sqrt{10})$, $\vec{d}(5; 5)$, $\vec{e}(4; -2)$, $\vec{f}(-3; 6)$ найдите те, которые имеют равные модули.

205. Модуль вектора $\vec{a}(-15; y)$ равен 17. Найдите y.

206. Модуль вектора $\vec{m}$ равен 6, а его координаты равны. Найдите координаты вектора $\vec{m}$.

207. Две вершины прямоугольника $ABCD$ — точки $B(2; 3)$ и $C(2; 9)$. Модуль вектора $\overrightarrow{AC}$ равен 10. Найдите координаты точек A и D.

Сложение и вычитание векторов

208. С помощью правила треугольника постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 82.

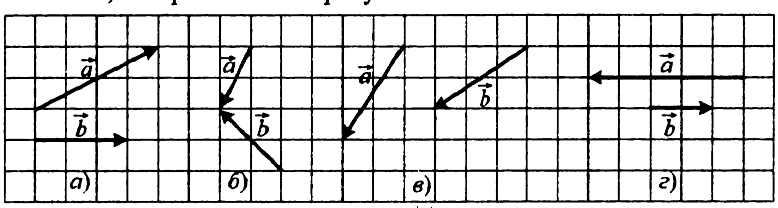


Рис. 82

209. С помощью правила параллелограмма постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 82, *а*), *б*), *в*).

210. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 82, постройте вектор $\vec{a}-\vec{b}$.

211. Четырехугольник *ABCD* — ромб, *O* — точка пересечения его диагоналей. Среди данных пар векторов укажите пары противоположных векторов:

1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$; 5) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}$;

2) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{DA}$; 4) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CO}$; 6) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$.

212. Четырехугольник *ABCD* — параллелограмм. Найдите:

1) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$.

2) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}$;

213. Может ли быть нулевым вектором сумма трех векторов, модули которых равны:

1) 3; 7; 11; 2) 6; 5; 12; 3) 8; 7; 15?

214. Даны векторы $\vec{a}(-6;1)$ и $\vec{b}(5;-3)$. Найдите:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $|\vec{a}+\vec{b}|$; 4) $|\vec{a}-\vec{b}|$.

215. Даны точки $A(-2;3)$ и $B(5;0)$. Найдите координаты точки *C* такой, что $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

216. Найдите координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если их сумма имеет координаты (6; –3), а разность — (–1; 4).

217. Может ли модуль суммы двух ненулевых векторов быть равным сумме их модулей?

218. Диагонали параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке *O* (рис. 83). Выразите векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DC}$ через векторы $\overrightarrow{AO}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

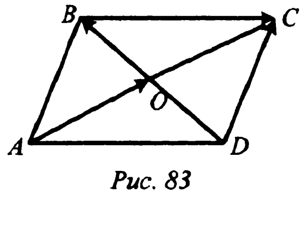


Рис. 83

219. Постройте такие ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что $|\vec{a}|-|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.

220. Даны векторы $\vec{a}(2;-5)$, $\vec{b}(x;-3)$, $\vec{c}(4;1)$. При каком значении *x* модуль вектора $\vec{c}-\vec{b}-\vec{a}$ будет принимать наименьшее значение?

221. Найдите геометрическое место точек $C(x; y)$ координатной плоскости таких, что для точек $A(1;-1)$ и $B(0;2)$ выполняется равенство:

1) $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$; 2) $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Умножение вектора на число

222. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 84). Постройте вектор: 1) $-\frac{4}{3}\vec{a}$; 2) $\frac{1}{2}\vec{b}$; 3) $-2\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$.

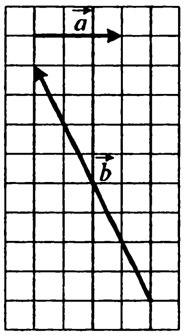


Рис. 84

223. Постройте два неколлинеарных вектора $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Отметьте произвольную точку и отложите от нее вектор: 1) $-\vec{c}+4\vec{d}$; 2) $\frac{1}{5}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{d}$.

224. Известно, что $\left|\vec{c}\right|=0{,}8$. Чему равен модуль вектора: 1) $5\vec{c}$; 2) $-0{,}3\vec{c}$?

225. Даны векторы $\vec{a}(-2;4)$ и $\vec{b}(3;1)$. Найдите координаты вектора:

1) $3\vec{a}-\vec{b}$; 2) $2\vec{a}+4\vec{b}$; 3) $7\vec{a}-2\vec{b}$; 4) $6\vec{a}+5\vec{b}$.

226. Вычислите модуль вектора $\vec{x}=-4\vec{m}$, где $\vec{m}(-12;5)$.

227. Найдите модуль вектора $\vec{m}=5\vec{a}-3\vec{b}$, где $\vec{a}$ (5; 6); $\vec{b}$ (1; –4).

228. Точки M и K — середины сторон CD и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно (рис. 85). Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$.

229. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно, причем $AP=\frac{1}{4}AD$, $CQ=\frac{2}{7}CD$ (рис. 86).

Выразите: 1) векторы $\overrightarrow{BP}$ и $\overrightarrow{BQ}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{n}$; 2) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\overrightarrow{BP}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BQ}=\vec{b}$.

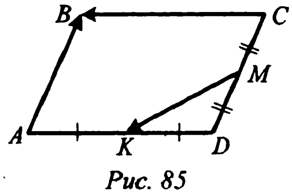


Рис. 85

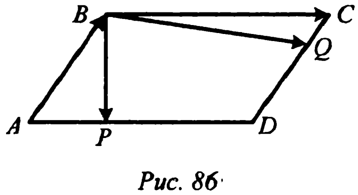


Рис. 86

230. Известно, что O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, $AO:OC=2:3$, $BO:OD=3:5$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{OC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BO}=\vec{b}$.

231. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбрали такие точки K и M соответственно, что $AK:KB=2:5$, $AM:MC=4:3$. Выразите:

1) векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{MB}$ через векторы $\overrightarrow{AK}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{CM}=\vec{c}$;

2) векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\overrightarrow{BM}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{CK}=\vec{b}$.

232. Известно, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

233. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A(-1;5)$, $B(-3;7)$, $C(4;-2)$, $D(-1;3)$?

234. Среди векторов $\vec{a}(2;-5)$, $\vec{b}(8;-20)$, $\vec{c}(-4;10)$, $\vec{d}(-14;35)$ найдите сонаправленные и противоположно направленные векторы.

235. Найдите значение m, при котором векторы $\vec{a}(m;3)$ и $\vec{b}(5;-8)$ коллинеарны.

236. Найдите координаты вектора, модуль которого равен 1 и который сонаправлен с вектором:

1) $\vec{a}(1;1)$; 2) $\vec{b}(24;-7)$; 3) $\vec{c}(x;y)$.

237. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, коллинеарного вектору $\vec{n}(8;-15)$, если $|\vec{m}|=51$.

238. Даны точки $A(-1;4)$ и $B(3;7)$. Найдите вектор $\vec{a}$ такой, что векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\vec{a}$ противоположно направлены и имеют равные модули.

239. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(1;-4)$, $B(2;1)$, $C(5;3)$ и $D(10;2)$ является трапецией.

240. Лежат ли точки $A(-1;5)$, $B(7;13)$ и $C(0;6)$ на одной прямой?

241. Известно, что O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $BC=2$, $AD=5$. Найдите такое число x, что:

1) $\overrightarrow{BO}=x\cdot\overrightarrow{DB}$; 2) $\overrightarrow{OA}=x\cdot\overrightarrow{OC}$.

242. Даны векторы $\vec{a}(2;-7)$, $\vec{b}(-2;5)$ и $\vec{n}(2;-7)$. Найдите такие числа x и y, что $\vec{n}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

Скалярное произведение векторов

243. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=7$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=30°$;

2) $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=11$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$;

3) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=90°$.

244. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, $\angle BAD=60°$, $AD=10$ см. Найдите скалярное произведение векторов:

1) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$;
5) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{OC}$;
2) $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DA}$;
4) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{AB}$;
6) $\overrightarrow{DO}$ и $\overrightarrow{OB}$.

245. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 135°, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=7$.

Найдите:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}$; 3) $(\vec{b}-2\vec{a})\cdot\vec{b}$; 4) $(2\vec{b}+5\vec{a})\cdot\vec{a}$.

246. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$.

Вычислите скалярное произведение $(\vec{a}+2\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$.

247. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}$ (1; –3), $\vec{b}$ (4; –2);
3) $\vec{a}$ (–10; 5), $\vec{b}$ (4; 8).
2) $\vec{a}$ (–3; –8), $\vec{b}$ (–7; –1);

248. Даны векторы $\vec{a}(4;y)$ и $\vec{b}(5;-3)$. При каком значении y $\vec{a}\cdot\vec{b}=8$?

249. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}(5;-1)$ и $\vec{b}(2;6)$.

250. Найдите косинусы углов треугольника ABC, если A(1; –4), B(4; 7), C(–2; 1). Установите вид треугольника.

251. Даны векторы $\vec{a}(6;-1)$ и $\vec{b}(x;2)$. При каком значении x векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?

252. Даны векторы $\vec{a}(4;-7)$ и $\vec{b}(3;y)$. При каких значениях y угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$: 1) острый; 2) прямой; 3) тупой?

253. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(1;2)$, $B(2;5)$, $C(5;4)$, $D(4;1)$ является прямоугольником.

254. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, коллинеарного вектору $\vec{b}(2;-5)$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=-58$.

255. Найдите координаты вектора, который перпендикулярен вектору $\vec{a}(3;-1)$ и модуль которого равен модулю вектора $\vec{a}$.

256. Даны векторы $\vec{a}$ $(3;-5)$ и $\vec{b}$ $(4;-1)$. Найдите значение α, при котором векторы $\alpha\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}$ перпендикулярны.

257. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}=2\vec{m}+3\vec{n}$ и $\vec{b}=3\vec{m}-\vec{n}$, если $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$ и $\vec{m}\perp\vec{n}$.

258. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=4$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$. Найдите:

1) $|\vec{a}-\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}+4\vec{b}|$.

259. Найдите косинусы углов, которые образует вектор $\overrightarrow{AB}$, где $A(3;7)$, $B(5;1)$, с отрицательными направлениями координатных осей.

260. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, а векторы $3\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}-4\vec{b}$ перпендикулярны.

261. Найдите геометрическое место точек $M(x;y)$ координатной плоскости таких, что для точек $A(1;3)$ и $B(2;-4)$ выполняется равенство:

1) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$; 3) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$;

2) $(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{BA}=0$; 4) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=2$.

262. Составьте уравнение прямой, которая касается окружности с центром $O(2;1)$ в точке $A(5;-3)$.

263. Найдите косинус угла между медианами равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенными к боковым сторонам.

264. Докажите с помощью векторов утверждение: если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

Параллельный перенос

265. Постройте образ треугольника ABC при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 87).

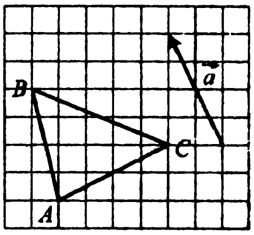


Рис. 87

266. Найдите точки, являющиеся образами точек $A(1;-2)$, $B(-2;3)$, $C(0;4)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{n}(-2;5)$. Образами каких точек при таком параллельном переносе являются точки $M(3;-5)$, $N(2;0)$, $K(0;-6)$?

267. При параллельном переносе образом точки $A(4;-2)$ является точка $B(-1;7)$. Какая точка является образом точки $M(0;-4)$ при этом параллельном переносе?

268. Найдите вектор, при параллельном переносе на который образом точки $A(-5;2)$ будет точка $B(3;-1)$, и вектор, при параллельном переносе на который образом точки B будет точка A.

269. Постройте образы точек $A(2;6)$, $B(1;-3)$, $C(0;-2)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{m}(0;-3)$. Запишите координаты построенных точек.

270. Даны точки $A(-1;-6)$ и $B(5;-2)$. При параллельном переносе образом середины отрезка AB является точка $C(3;7)$. Найдите координаты точек, являющихся образами точек A и B.

271. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(3;-5)$, $B(4;1)$, $C(7;-8)$. Осуществили параллельный перенос треугольника ABC, при котором образом точки A является точка B. Каковы координаты вершин полученного треугольника? Сделайте рисунок.

272. Дан ромб $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Существует ли параллельный перенос, при котором: 1) сторона AB является образом стороны BC; 2) сторона AB является образом стороны CD; 3) отрезок AO является образом отрезка CO? В случае утвердительного ответа укажите вектор, на который должен осуществляться параллельный перенос.

273. Запишите уравнение окружности, являющейся образом окружности $(x+4)^2+(y-2)^2=8$ при параллельном переносе на вектор $\vec{c}(-3;2)$.

274. Осуществлен параллельный перенос прямой $3x+5y=2$. Запишите уравнение полученной прямой, если она проходит через точку: 1) $O(0; 0)$; 2) $A(-2; 1)$.

Осевая симметрия

275. Даны прямая l и точка C, ей не принадлежащая. Постройте точку, симметричную точке C относительно прямой l.

276. Постройте образы отрезков AB и CD, изображенных на рисунке 88, при симметрии относительно прямой m.

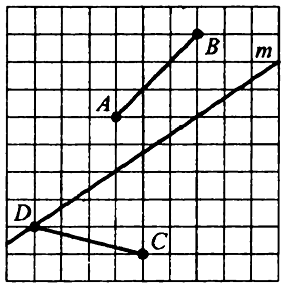


Рис. 88

277. Даны треугольник ABC и прямая m, пересекающая его стороны AB и BC. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой m.

278. Какие условия должны выполняться, чтобы прямая l была осью симметрии окружности?

279. На рисунке 89 $AB=AD$, $\angle BAC=\angle DAC$. Докажите, что точки B и D симметричны относительно прямой AC.

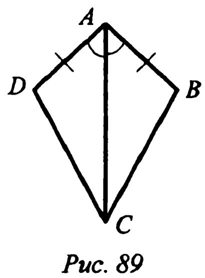


Рис. 89

280. Докажите, что если прямая, содержащая диагональ параллелограмма, является его осью симметрии, то этот параллелограмм — ромб.

281. Сколько осей симметрии имеет: 1) равносторонний треугольник; 2) ромб; 3) окружность?

282. Прямая l делит отрезок AB на две равные части. Можно ли утверждать, что точки A и B симметричны относительно прямой l?

283. Начертите треугольник так, чтобы прямые, которым принадлежат его медианы, были его осями симметрии.

284. Прямая l является осью симметрии четырехугольника $ABCD$. Можно ли утверждать, что углы этого четырехугольника попарно равны? Ответ обоснуйте.

285. Прямая, проходящая через середины оснований трапеции, является ее осью симметрии. Докажите, что эта трапеция равнобокая.

286. Найдите координаты точек, симметричных точке $N(-2;-3)$ относительно осей координат.

287. Найдите x и y, если точки $A(5;y)$ и $B(x;-2)$ симметричны относительно оси абсцисс.

288. Постройте точки, симметричные точкам $A(2;-3)$, $B(-1;0)$ и $C(0;7)$ относительно: 1) оси x; 2) оси y; 3) прямой, содержащей биссектрисы II и IV координатных углов. Запишите координаты полученных точек.

289. Осями симметрии прямоугольника являются прямые $y=-5$ и $x=4$. Одна из его вершин имеет координаты $(1;3)$. Найдите координаты остальных вершин прямоугольника.

290. Диагонали квадрата лежат на координатных осях. Найдите координаты вершин квадрата, если середина одной из его сторон имеет координаты $(2;-1)$.

291. Постройте ромб $ABCD$, у которого диагональ AC данной длины m лежит на данной прямой, а вершины B и D — на данной окружности и данной прямой.

292. Даны прямая l и точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой l такую точку X, чтобы сумма $AX+BX$ принимала наименьшее значение.

Центральная симметрия

293. Даны точки A и B. Постройте точку C, относительно которой точка B симметрична точке A.

294. Даны треугольник ABC и точка M, лежащая вне треугольника. Постройте треугольник, симметричный данному относительно точки M.

295. Дан треугольник ABC. Постройте треугольник, симметричный данному относительно точки пересечения его медиан.

296. Даны окружность с центром в точке O и точка M, лежащая вне окружности. Постройте окружность, симметричную данной относительно точки M.

297. Имеет ли центр симметрии: 1) отрезок с «выколотыми» концами; 2) отрезок с «выколотой» внутренней точкой; 3) прямая с «выколотой» точкой? В случае утвердительного ответа укажите центр симметрии.

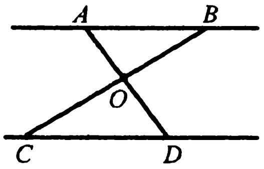


Рис. 90

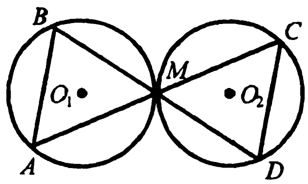


Рис. 91

298. Может ли образом окружности при центральной симметрии быть эта же окружность?

299. На рисунке 90 прямые AB и CD параллельны, $AB = CD$. Докажите, что отрезки AB и CD симметричны относительно точки O.

300. Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке M (рис. 91). Докажите, что $AB = CD$.

301. Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке M (рис. 91). Докажите, что $AB \parallel CD$.

302. Найдите точку, симметричную точке $K(-3; -4)$ относительно начала координат.

303. Среди точек $A(5;-2)$, $B(1;-3)$, $C(-5;2)$, $D(4;7)$, $E(-4;-7)$, $F(-1;3)$ укажите пары точек, симметричных относительно начала координат.

304. Симметричны ли точки $A(7;-3)$ и $B(3;11)$ относительно точки $C(2;-7)$?

305. Найдите координаты центра симметрии точек $A(-6;4)$ и $B(8;-2)$.

306. Найдите координаты точки M, симметричной точке $N(1;-5)$ относительно точки $K(0;3)$.

307. Точки $M(x;-3)$ и $B(2;y)$ симметричны относительно точки $C(3;-2)$. Найдите x и y.

308. Запишите уравнение окружности, симметричной окружности $(x+1)^2+(y-4)^2=7$ относительно:

1) начала координат; 2) точки $M(3;-1)$.

309. Запишите уравнение прямой, симметричной прямой $3x+2y=4$ относительно: 1) начала координат; 2) точки $M(4;-2)$.

310. Постройте отрезок, серединой которого является данная точка, а концы принадлежат двум данным окружностям.

311. Даны угол и точка M , принадлежащая этому углу, но не принадлежащая его сторонам. Через точку M проведите прямую так, чтобы отрезок, концы которого принадлежат сторонам угла, делился точкой M пополам.

Поворот

312. Даны точки K и O. Постройте образ точки A при повороте вокруг точки O: 1) на угол 70° по часовой стрелке; 2) на угол 115° против часовой стрелки.

313. Даны отрезок MN и точка O, ему не принадлежащая. Постройте образ отрезка MN при повороте на угол 40° вокруг точки O против часовой стрелки.

314. Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 92). Укажите образы точек B, E, O, стороны DE, отрезка OF, диагонали AD при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 60°.

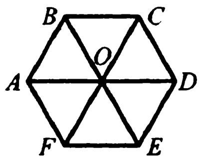


Рис. 92

315. Дан луч OA. Постройте образ луча OA при повороте на угол 65° по часовой стрелке вокруг: 1) точки M, принадлежащей лучу; 2) точки N, не принадлежащей лучу.

316. Постройте образы точек $M(-2; 0)$, $N(0; -5)$, $K(1; 3)$, $P(-3; -1)$ при повороте на угол 90° против часовой стрелки вокруг начала координат. Укажите координаты полученных точек.

317. Образом точки $M(-3; m)$ при повороте на угол 90° по часовой стрелке вокруг точки $O(0; 0)$ является точка $N(-5; n)$. Найдите m и n.

318. Докажите, что если образом прямоугольника при повороте на угол 90° вокруг его центра симметрии является этот же прямоугольник, то он является квадратом.

319. Квадрат со стороной 6 см повернули вокруг его центра на угол 45°. Найдите периметр образовавшегося восьмиугольника.

320. Постройте квадрат, если даны его центр и две точки, принадлежащие двум его соседним сторонам.

321. Постройте правильный треугольник, если даны точка пересечения его медиан и прямая, которой принадлежит одна из его сторон.

322. В данный квадрат впишите правильный треугольник так, чтобы одна из его вершин совпадала с вершиной квадрата, а две другие принадлежали сторонам квадрата.

323. Постройте правильный треугольник так, чтобы его вершины принадлежали трем данным параллельным прямым.

Гомотетия. Подобие фигур

324. Начертите отрезок MN длиной 3 см и отметьте точку O, не принадлежащую этому отрезку. Постройте отрезок, гомотетичный отрезку MN с центром гомотетии в точке O и коэффициентом: 1) $k=-2$; 2) $k=\frac{1}{3}$.

325. Начертите острый угол и отметьте точку M, лежащую вне угла. Постройте угол, гомотетичный данному с центром гомотетии в точке M и коэффициентом $k=\frac{1}{4}$.

326. Постройте ромб, гомотетичный данному ромбу с центром гомотетии в точке пересечения его диагоналей и коэффициентом гомотетии: 1) $k=-\frac{1}{2}$ 2) $k=1{,}5$.

327. Отметьте точки M и N. Найдите такую точку K, чтобы точка M была образом точки N при гомотетии с центром K и коэффициентом $k=3$.

328. При гомотетии с центром в начале координат точка $Q(1; -3)$ является образом точки $P(2; -6)$. Найдите коэффициент гомотетии.

329. Даны две концентрические окружности. Может ли одна из них быть образом другой окружности при гомотетии? В случае утвердительного ответа укажите, где должен находиться центр гомотетии и чему должен быть равным коэффициент гомотетии.

330. Могут ли два треугольника быть подобными, но не гомотетичными?

331. Стороны двух правильных треугольников относятся как 2 : 3. Как относятся их площади?

332. Диагональ одного квадрата в два раза больше диагонали другого квадрата. Как относятся их площади?

333. В треугольнике провели среднюю линию. Как относится площадь полученного треугольника к площади данного треугольника?

334. Стороны двух правильных шестиугольников относятся как 3 : 5, а площадь меньшего из них равна 72 см^2. Найдите площадь большего шестиугольника.

335. Площадь многоугольника равна 80 $см^2$. Найдите площадь подобного ему многоугольника, если соответствующие стороны этих многоугольников равны 10 см и 6 см. Сколько решений имеет задача?

336. Прямая, параллельная стороне треугольника, делит его на треугольник и трапецию. Площади этих фигур относятся как 1 : 4 соответственно. Найдите периметр данного треугольника, если периметр треугольника, отсеченного этой прямой, равен 20 см.

337. Медиана треугольника равна 6 см. Прямая, параллельная медиане, делит треугольник на части, площади которых относятся как 5 : 7. Найдите длину отрезка этой прямой, содержащегося между сторонами треугольника.

338. На диагонали AC квадрата $ABCD$ отметили точку M так, что $AM : MC = 8 : 3$. Прямая DM пересекает сторону BC в точке N. Найдите площадь треугольника AMD, если площадь треугольника NMC равна 12 $см^2$.

339. Проведите прямую, параллельную медиане данного треугольника, так, чтобы она отсекала от него треугольник, площадь которого равна $\frac{1}{8}$ площади данного треугольника.

340. Стороны треугольника равны 10 см, 17 см и 24 см. Биссектрису треугольника, проведенную из вершины его меньшего угла, разделили в отношении 2 : 5, считая от вершины, и через точку деления провели прямую, параллельную меньшей стороне. Найдите площадь образовавшейся при этом трапеции.

341. В данный правильный треугольник впишите квадрат так, чтобы одна из сторон квадрата была параллельна стороне треугольника.

Прямые и плоскости в пространстве

342. Сколько различных плоскостей можно провести через данную точку?

343. Сколько различных плоскостей можно провести через две пересекающиеся прямые?

344. Можно ли утверждать, что две прямые, не имеющие общих точек, параллельны: 1) на плоскости; 2) в пространстве?

345. Прямые AB и CD — скрещивающиеся. Каково взаимное расположение прямых AC и BD?

346. Прямые a и b пересекаются и прямые b и c пересекаются. Верно ли утверждение, что прямые a и c пересекаются?

347. Прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости α. Сколько еще существует в плоскости α прямых, параллельных прямой a?

348. Прямые a и b параллельны плоскости α. Верно ли утверждение, что прямые a и b параллельны?

349. Прямые a и b параллельны. Плоскость α параллельна прямой a, а плоскость β — прямой b. Верно ли утверждение, что плоскости α и β параллельны?

350. Прямая a перпендикулярна плоскости α, а прямая b параллельна прямой a. Верно ли утверждение, что прямая b перпендикулярна плоскости α?

351. Из точки B опущен перпендикуляр BC на плоскость γ, точка M принадлежит плоскости γ. Найдите:

1) BC, если $BM = 17$ см, $CM = 15$ см;

2) CM, если $BC = 12$ см, $\angle BMC = 60°$.

352. Из точки F опущен перпендикуляр FK на плоскость γ, точки M и N принадлежат плоскости γ, $MK = 4\sqrt{3}$ см, $\angle FMK = 30°$, $\angle FNK = 45°$. Найдите длину отрезка FN.

353. Из точки B опущен перпендикуляр BA на плоскость α, точки E и F принадлежат плоскости α, $AE = 9$ см, $AF = 5$ см, отрезок BE на 2 см больше отрезка BF. Найдите длину перпендикуляра BA.

Прямая призма

354. На рисунке 93 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите:

1) ребра, параллельные ребру BB_1;

2) ребра, скрещивающиеся с ребром DD_1;

3) ребра, параллельные грани BB_1C_1;

4) ребра, перпендикулярные грани AA_1D_1.

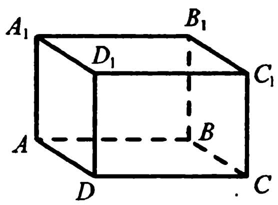


Рис. 93

355. Найдите площадь поверхности и объем куба с ребром 6 см.

356. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда (рис. 93), если $BC = 10$ см, $CD = 6$ см, $CC_1 = 8$ см.

357. Основанием прямой призмы является ромб со стороной 4 см и острым углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 9 см.

358. Основанием прямой призмы является правильный шестиугольник со стороной 2 см, а боковое ребро призмы равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы.

359. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 6 см.

360. Основанием прямой призмы является равнобокая трапеция с основаниями 4 см и 8 см и острым углом 60°. Найдите площадь поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 10 см.

Пирамида

361. На рисунке 94 изображена пирамида *SABCDE*. Назовите:

1) основание пирамиды;
2) вершину пирамиды;
3) боковые ребра пирамиды;
4) боковые грани пирамиды.

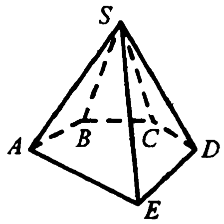


Рис. 94

362. Боковые грани пирамиды — правильные треугольники со стороной 2 см, а ее основанием является правильный шестиугольник. Найдите площадь поверхности пирамиды.

363. Вычислите площадь поверхности четырехугольной пирамиды, развертка которой изображена на рисунке 95 (длины отрезков даны в сантиметрах).

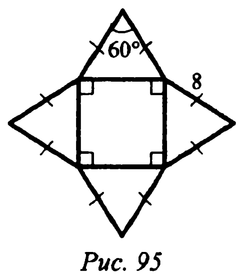


Рис. 95

364. Боковые ребра *MA*, *MB*, *MC*, *MD* и *ME* пятиугольной пирамиды *MABCDE* равны, $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMD = \angle DME = \angle EMA = 30°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $MA = 8$ см.

365. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной 6 см. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 6 см.

366. Найдите объем пирамиды, основание которой — правильный шестиугольник со стороной 3 см, а высота пирамиды равна 6 см.

367. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник *ABC*, $AB = AC$, $BC = 8$ см, $\angle A = 120°$. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 9 см.

Цилиндр

368. На рисунке 96 изображен цилиндр. Назовите отрезок, являющийся:
1) образующей цилиндра;
2) радиусом нижнего основания цилиндра;
3) радиусом верхнего основания цилиндра.
Какая прямая является осью цилиндра?

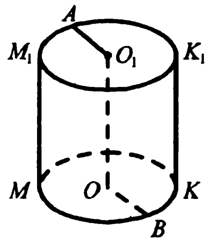


Рис. 96

369. Радиус основания цилиндра равен 8 см, а его образующая — 10 см. Найдите площадь поверхности и объем цилиндра.

370. Прямоугольник, стороны которого равны 14 см и 4 см, вращается вокруг прямой, проходящей через середины меньших сторон прямоугольника. Найдите площадь поверхности и объем полученного цилиндра.

Конус

371. На рисунке 97 изображен конус. Назовите отрезок, являющийся:
1) высотой конуса;
2) образующей конуса;
3) радиусом основания конуса.

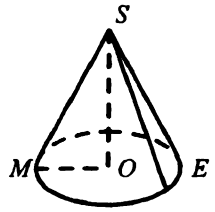


Рис. 97

372. Радиус основания конуса равен 10 см, а образующая — 26 см. Найдите площадь поверхности и объем конуса.

373. Равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см вращается вокруг высоты, проведенной к гипотенузе. Найдите площадь поверхности и объем полученного конуса.

374. Катет прямоугольного треугольника равен a, а гипотенуза — c. Треугольник вращается сначала вокруг данного катета, а затем вокруг другого катета. Найдите отношение объемов полученных конусов.

Шар

375. Найдите площадь поверхности и объем шара, радиус которого равен 5 см.

376. Полукруг, диаметр которого равен 10 см, вращается вокруг этого диаметра. Найдите площадь поверхности и объем полученного шара.

377. Во сколько раз надо увеличить радиус шара, чтобы его объем увеличился в 8 раз? Как при этом изменится площадь поверхности шара?

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

Контрольная работа № 1

Тема. ***Решение треугольников***

1.° Две стороны треугольника равны 4 см и 8 см, а угол между ними — 60°. Найдите третью сторону треугольника и его площадь.

2.° Два угла треугольника равны 30° и 135°, а сторона, лежащая против меньшего из них, равна 4 см. Найдите сторону треугольника, лежащую против большего из данных углов.

3.• Найдите неизвестные стороны и углы треугольника *ABC*, если $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, $\angle A = 110°$.

4.• Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 10 см, 17 см и 21 см.

5.•• Стороны треугольника равны 7 см, 11 см и 12 см. Найдите медиану треугольника, проведенную к его большей стороне.

Контрольная работа № 2

Тема. ***Правильные многоугольники***

1.° Найдите углы правильного восьмиугольника.

2.° Найдите длину окружности, описанной около квадрата со стороной 8 см.

3.° Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна $5\sqrt{3}$ см. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.

4.• Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен $2\sqrt{3}$ см, а радиус окружности, вписанной в него, — 3 см. Найдите: 1) сторону многоугольника; 2) количество сторон многоугольника.

5.• Сторона треугольника равна $4\sqrt{2}$ см, а прилежащие к ней углы равны 80° и 55°. Найдите длины дуг, на которые делят описанную окружность треугольника его вершины.

6.•• В правильном шестиугольнике *ABCDEF* соединили середины сторон *AB*, *CD* и *EF*. Найдите сторону правильного треугольника, образовавшегося при этом, если $AB = a$.

Контрольная работа № 3

Тема. ***Декартовы координаты на плоскости***

1.° Найдите длину отрезка AB и координаты его середины, если $A(-3; 2)$ и $B(1; -5)$.

2.° Составьте уравнение окружности, центр которой находится в точке $M(1; -3)$ и которая проходит через точку $K(-4; 2)$.

3.° Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $K(3; -2)$ и $P(5; 2)$.

4.* Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A(-2; 3)$, $B(4; 5)$, $C(2; 1)$.

5.* Найдите координаты точки, принадлежащей оси абсцисс и равноудаленной от точек $A(-2; 3)$ и $B(6; 1)$.

6.** Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = -3x + 10$ и проходит через центр окружности $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

Контрольная работа № 4

Тема. ***Векторы***

1.° Даны точки $A(-2; 3)$, $B(1; -1)$, $C(2; 4)$. Найдите:

1) координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$;

2) модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$;

3) координаты вектора $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CA}$;

4) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

2.° Начертите треугольник ABC. Постройте вектор:

1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$; 3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

3.* Даны векторы $\vec{a}(2; 6)$ и $\vec{b}(-3; k)$. При каком значении k векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: 1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?

4.* На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки F и E так, что $AF : FB = 1 : 4$, $BE : EC = 1 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

5.** Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = \vec{n} + 2\vec{m}$ и $\vec{b} = 3\vec{n} - \vec{m}$, если $\vec{m} \perp \vec{n}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$.

Контрольная работа № 5

Тема. ***Геометрические преобразования***

1.° Найдите координаты точек, симметричных точкам $A(-3; 4)$ и $B(0; 5)$ относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала координат.

2.° Начертите треугольник ABC. Постройте образ треугольника ABC: 1) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$; 2) при симметрии относительно точки A; 3) при симметрии относительно прямой AB.

3.* Точка $A_1(8; y)$ является образом точки $A(x; -3)$ при гомотетии с центром $H(2; 1)$ и коэффициентом $k = -4$. Найдите x и y.

4.* Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите площадь трапеции, если $BC : AD = 2 : 5$, а площадь треугольника BMC равна 12 см^2.

5.** Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a. На прямой a найдите такую точку X, чтобы прямая a содержала биссектрису угла AXB.

Контрольная работа № 6

Тема. ***Начальные сведения по стереометрии***

1.° Сколько плоскостей можно провести через две точки? *

2.° Прямая m параллельна прямой n, которая параллельна плоскости α. Верно ли утверждение, что прямая m обязательно параллельна плоскости α? *

3.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 98). Каково взаимное расположение прямых: 1) AB и C_1D_1; 2) BB_1 и CD? *

4.° Вычислите объем конуса, высота которого равна 6 см, а радиус основания — 4 см.

5.° Чему равен объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, а боковое ребро равно 6 см?

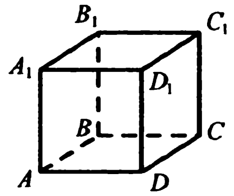


Рис. 98

---

* Ответ на вопрос задачи не требует обоснования.

6.* Радиус одного шара равен 2 см, а другого — 4 см. Найдите отношение объемов данных шаров.

7.* Найдите площадь поверхности пирамиды $SABC$, если $SA = SB = SC = a$, $\angle ASB = \angle ASC = \angle BSC = 90°$.

8.** Из точки M опущен перпендикуляр MO на плоскость α, точки A и B принадлежат плоскости α, $\angle MAO = 30°$, $\angle MBO = 60°$, $\angle AOB = 120°$, $AO = 3$ см. Найдите расстояние между точками A и B.

Вариант 2

Контрольная работа № 1

Тема. ***Решение треугольников***

1.° Две стороны треугольника равны 6 см и 4 см, а угол между ними — 120°. Найдите третью сторону треугольника и его площадь.

2.° Два угла треугольника равны 60° и 45°, а сторона, лежащая против большего из них, равна $3\sqrt{2}$ см. Найдите сторону треугольника, лежащую против меньшего из данных углов.

3.• Найдите неизвестные стороны и углы треугольника ABC, если $AB = 9$ см, $\angle A = 40°$, $\angle B = 20°$.

4.• Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 17 см, 25 см и 28 см.

5.•• Две стороны треугольника равны 7 см и 9 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, — 4 см. Найдите неизвестную сторону треугольника.

Контрольная работа № 2

Тема. ***Правильные многоугольники***

1.° Найдите углы правильного десятиугольника.

2.° Найдите площадь круга, вписанного в правильный треугольник со стороной 6 см.

3.° В окружность вписан правильный шестиугольник со стороной 4 см. Найдите сторону квадрата, описанного около этой окружности.

4.• Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен $4\sqrt{2}$ см, а сторона многоугольника — 8 см. Найдите: 1) радиус окружности, вписанной в многоугольник; 2) количество сторон многоугольника.

5.• Сторона треугольника равна $6\sqrt{3}$ см, а прилежащие к ней углы равны 50° и 70°. Найдите длины дуг, на которые делят описанную окружность треугольника его вершины.

6.•• Найдите диагональ AD правильного восьмиугольника $ABCDEFKP$, если $AB = a$.

Контрольная работа № 3

Тема. ***Декартовы координаты на плоскости***

1.° Найдите длину отрезка DF и координаты его середины, если $D(4; -5)$ и $F(-3; -1)$.

2.° Составьте уравнение окружности, проходящей через точку $P(-2; -5)$, центр которой находится в точке $E(1; -3)$.

3.° Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $M(-2; -2)$ и $N(2; 10)$.

4.• Найдите координаты вершины C параллелограмма $ABCD$, если $A(-3; -2)$, $B(4; 7)$, $D(-2; -5)$.

5.• Найдите координаты точки, принадлежащей оси ординат и равноудаленной от точек $C(2; -1)$ и $D(-3; 7)$.

6.•• Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 5x - 9$ и проходит через центр окружности $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$.

Контрольная работа № 4

Тема. ***Векторы***

1.° Даны точки $M(-2; -4)$, $P(4; 4)$, $K(-1; 3)$. Найдите:

1) координаты векторов $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{PM}$;

2) модули векторов $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{PM}$;

3) координаты вектора $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{MK} - 3\overrightarrow{KP}$;

4) косинус угла между векторами $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{KP}$.

2.° Начертите треугольник ABC. Постройте вектор:

1) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$.

3.• Даны векторы $\vec{m}(p; 4)$ и $\vec{n}(20; -10)$. При каком значении p векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$: 1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?

4.• На сторонах CD и AD параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки M и K так, что $CM : MD = 2 : 3$, $AK : KD = 1 : 2$. Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

5.•• Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = 3\vec{k} - \vec{p}$ и $\vec{b} = \vec{k} + 2\vec{p}$, если $\vec{k} \perp \vec{p}$, $|\vec{k}| = |\vec{p}| = 1$.

Контрольная работа № 5

Тема. *Геометрические преобразования*

1.° Найдите координаты точек, симметричных точкам $C(2;-1)$ и $D(-4;0)$ относительно: 1) оси ординат; 2) оси абсцисс; 3) начала координат.

2.° Начертите треугольник ABC. Постройте образ треугольника ABC: 1) при параллельном переносе на вектор $\overline{AB}$; 2) при симметрии относительно точки C; 3) при симметрии относительно прямой AC.

3.* Точка $B_1(x;5)$ является образом точки $B(-7;y)$ при гомотетии с центром $H(3;-1)$ и коэффициентом $k=-\frac{1}{2}$. Найдите x и y.

4.* Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника AMD, если $BC:AD=3:4$, а площадь трапеции равна 14 см^2.

5.** Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a. Найдите на прямой a такую точку X, чтобы сумма $AX+XB$ была наименьшей.

Контрольная работа № 6

Тема. *Начальные сведения по стереометрии*

1.° Сколько плоскостей можно провести через три точки? *

2.° Прямая a не параллельна прямой b, принадлежащей плоскости α. Верно ли утверждение, что прямая a обязательно не параллельна плоскости α? *

3.° Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 99). Каково взаимное расположение прямых: 1) A_1B_1 и CD; 2) AA_1 и BC? *

4.° Вычислите объем цилиндра, образующая которого равна 5 см, а радиус основания — 2 см.

5.° Чему равен объем пирамиды, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетами 2 см и 6 см, а высота которой равна 5 см?

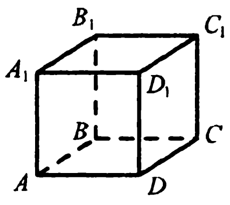


Рис. 99

* Ответ на вопрос задачи не требует обоснования.

6. Радиус одного шара равен 6 см, а другого — 3 см. Найдите отношение площадей поверхностей данных шаров.

7. Найдите площадь поверхности пирамиды $SABCD$, если $SA = SB = SC = SD = a$, $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle ASD = 60°$.

8. Из точки D опущен перпендикуляр DK на плоскость α, точки E и F принадлежат плоскости α, $\angle DEK = 45°$, $\angle DFK = 30°$, $\angle EDF = 135°$, $DF = 2\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние между точками E и F.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ТРЕНИРОВОЧНЫМ УПРАЖНЕНИЯМ

Вариант 1

7. 9 см или $3\sqrt{17}$ см. **10.** 3 см. *Указание.* Из ΔABC найдите косинус угла A. **12.** 18 см. **13.** 5 см, 3 см. **14.** 3 см или 5 см. **15.** $\frac{a\sqrt{8\cos^2\alpha+1}}{4\cos\alpha}$. **16.** $\frac{b^2+c^2-a^2-d^2}{2(ad+bc)}$. **18.** $2\sqrt{19}$ см. *Указание.* Пусть в треугольнике ABC $AB=20$ см, $AC=12$ см, $\angle A=120°$. На продолжении медианы AM за точку M отложите отрезок MD, равный AM, и рассмотрите ΔABD. **19.** 24 см, 28 см. **20.** 15 см, 10 см. **21.** 5,5 см. *Указание.* Продлите медиану треугольника на ее длину и полученную точку соедините с двумя другими вершинами треугольника. Рассмотрите полученный параллелограмм. **23.** $2\sqrt{10}$ см. **24.** $3\sqrt{61}$ см. *Указание.* $AM:MM_1 = BM:MM_2 = 2:1$. Рассмотрите ΔAMB и найдите его медиану MM_3. **28.** 30°. **29.** 60° или 120°. **30.** Нет. **31.** $\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$, $\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$. **32.** $\frac{c\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\sin\gamma}$. **33.** $\frac{c\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(45°+\alpha)}$. **36.** $\frac{l\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\alpha}$, $\frac{l\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\beta}$, $\frac{l\cos\frac{\alpha+\beta}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$. **38.** $4(2+\sqrt{6})$ см, $4(3+\sqrt{6})$ см. **40.** $\frac{P\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{P\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{P\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$. **42.** $\sqrt{10}$ см или $\sqrt{58}$ см. **43.** $3\sqrt{3}$ см. **46.** $\frac{6\sqrt{105}}{5}$ см. *Указание.* Радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABD. **48.** *Указание.* Докажите равенство синусов углов ABC и AOC. **56.** $10\sqrt{6}$ см. **60.** $22\sqrt{14}$ см^2. **63.** 52 см^2, 30 см^2, 74 см^2. **68.** 45°, 45°, 135°, 135°. **70.** $\frac{160\sqrt{3}}{3}$ см^2. **71.** $2\sqrt{3}$ см, 6 см. **74.** 12 см^2. *Указание.* $S_{ABM}\cdot S_{CMD}=S_{BMC}\cdot S_{AMD}$.

75. $20\sqrt{3}$ см^2. *Указание.* Найдите, пользуясь теоремой косинусов, угол между сторонами четырехугольника. **79.** 5. **85.** 120°. **96.** Нет. *Указание.* Отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной равно косинусу половины центрального угла. Найдите косинус половины центрального угла для правильных треугольника и четырехугольника. Учтите, что косинус убывает при увеличении угла от 0° до 90°. **99.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **103.** $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см. **104.** $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$ см, $6(\sqrt{2}+1)$ см, $6\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ см. **105.** $(3+\sqrt{3})$ см. **106.** $\frac{a\sqrt{3}}{18}$. *Указание.* $\frac{O_1K_1}{OK}=\frac{BO_1}{BO}=\frac{1}{3}$ (рис. 100). **107.** $\frac{a}{3}$. **108.** $4a^2$. *Указание.* Пусть $ABCD$ — данный квадрат, X — произвольная точка окружности, описанной около него. Тогда $XA^2+XC^2=$ $=XB^2+XD^2=AC^2$. **110.** 48 см^2. **112.** $2(\sqrt{2}-1)$ см^2. **113.** $2\sqrt{3}$ см^2. **119.** Равны. **121.** 38 км/ч. **127.** 24 см. **128.** πa. **129.** $\frac{9\pi}{5}$ см. **130.** $\pi\sqrt{3}$ см. **131.** *Указание.* Сравните периметры многоугольников и длину окружности. **148.** $\frac{100}{9}\pi$ см^2. **149.** 48 см^2. **150.** 3 : 1. **152.** $\frac{1568\pi}{81}$ см^2. **153.** $\frac{3}{2}(3\sqrt{3}-\pi)$ см^2. **155.** 13 5π см^2. **158.** *Указание.* Покажите, что $AB+BC=AC$. **161.** (2; 0). **164.** (0; 4). **167.** $(-2;8)$, $(-4;-6)$, $(6;0)$. **169.** 10. **170.** *Указание.* Докажите, что диагонали равны и их середины совпадают. **171.** $(1;3\sqrt{3})$ или $(1;-3\sqrt{3})$. **174.** $x^2+(y+8)^2=100$ или $x^2+(y-4)^2=100$. **178.** 1) $(1;2), R=2\sqrt{3}$. **182.** $y=-3x+1$. **186.** $a=-19$. **192.** $y=4x+13$. **215.** $C(2;-1{,}5)$. **220.** $y=3$. **237.** $\vec{b}(-12;16)$ или $\vec{b}(12;-16)$. **241.** 1) $\frac{3}{7}$; 2) $-\frac{3}{7}$. **242.** $x=2$, $y=1$. **257.** $-\frac{\sqrt{2}}{10}$. **258.** 1) $\sqrt{19}$. *Указание.* $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$. **260.** $-\frac{5}{7}$. **262.** $x-5y=-18$.

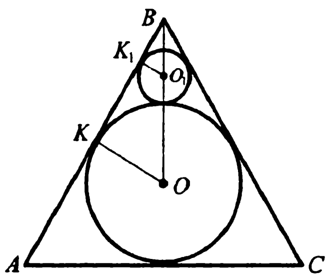


Рис. 100

Указание. Пусть $K(x; y)$ — произвольная точка искомой прямой. Тогда $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EK} = 0$. **274.** 1) $2x+3y=0$; 2) $2x+3y=10$. **288.** 3) $(-4; 3)$, $(0; 4)$, $(-5; 0)$. **291.** *Указание.* Постройте окружность, симметричную одной из данных окружностей относительно данной прямой. **300.** *Указание.* Докажите, что $\Delta AO_1O = \Delta BO_2O$. **307.** $m=-7$, $n=14$. **308.** 1) $(x+4)^2+(y-3)^2=11$; 2) $(x+12)^2+(y-7)^2=11$. **309.** 1) $2x-5y=7$; 2) $2x-5y=-11$. *Указание.* Искомая и данная прямые имеют равные угловые коэффициенты. **310.** *Указание.* Постройте прямую, симметричную одной из данных прямых относительно данной точки. **311.** *Указание.* Постройте окружность, симметричную одной из данных окружностей относительно точки K. **317.** $b=5$, $a=4$. **319.** 12 см. **320.** *Указание.* Пусть l_1' — образ прямой l при повороте на угол 90° вокруг точки A. Точка пересечения прямых l_2 и l_1' — вторая вершина искомого треугольника. **321.** *Указание.* Рассмотрите поворот данной прямой вокруг данной точки на угол 60°. **328.** $k=0{,}5$. **335.** 63 см², 448 см². **336.** $3\sqrt{2}$ см. **337.** $2\sqrt{3}$ см. **338.** 24 см². **339.** *Указание.* Длина отрезка искомой прямой, лежащего между сторонами треугольника, равна $\frac{1}{3}$ длины данной медианы. **340.** 48 см². **341.** *Указание.* Вершины квадрата лежат на пересечении сторон ромба с биссектрисами углов AOB, BOC, COD и DOA (рис. 101). **352.** 4 см. **353.** $\sqrt{15}$ см.

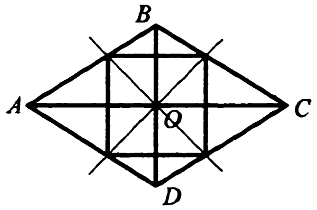


Рис. 101

Вариант 2

7. $\sqrt{129}$ см или $\sqrt{97}$ см. **10.** $\sqrt{22}$ см. *Указание.* Из ΔABC найдите косинус угла A. **12.** 60 см. **13.** 15 см, 40 см. **14.** 15 см. **15.** $\frac{c}{4\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{5-4\cos\alpha}$. **16.** $\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$. **18.** $\sqrt{97}$ см. *Указание.* См. указание к задаче 18 варианта 1. **19.** 16 см, 38 см. **20.** 10 см, 20 см.

21. $\sqrt{113}$ см. **23.** 10 см. **24.** $3\sqrt{559}$ см. *Указание.* Рассмотрите ΔMAB, где M — точка пересечения медиан треугольника, $AB = 42$ см. Медиана MD треугольника MAB равна трети искомой медианы. **25.** $\frac{4}{3}$. **28.** 45°. **29.** 60° или 120°. **30.** Нет. **32.** $\frac{m\sin\beta\sin\gamma}{b}$. **33.** $\frac{l\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\alpha}$, $\frac{l\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$. **36.** $a-\frac{a\sin\frac{\alpha}{5}}{\sin\frac{4\alpha}{5}}$, $\frac{a\sin\alpha}{\sin\frac{4\alpha}{5}}$. **38.** $8(1+\sqrt{2})$ см, $8(2+\sqrt{2})$ см. **40.** $AB = \frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $AC = \frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. *Указание.* На продолжении медианы AM за точку M отложите отрезок MD, равный AM. Рассмотрите ΔABD. **42.** $2\sqrt{7}$ см или $2\sqrt{31}$ см. **43.** 8 см. **44.** $\frac{R\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. *Указание.* $\angle AMB = 90° + \frac{\alpha}{2}$. **46.** $\frac{15\sqrt{41}}{8}$ см, 6 см. **48.** *Указание.* Примените теорему синусов к треугольникам ADC и BDC, докажите, что отношение радиусов описанных окружностей равно отношению сторон AC и BC. **56.** $12\sqrt{2}$ см. **60.** $10\sqrt{110}$ см^2. **63.** 90 см^2, 168 см^2, 246 см^2. **68.** $\sqrt{2}$. **70.** 360 см^2. **71.** $4\sqrt{3}$ см и 12 см. **74.** 18 см^2. *Указание.* $S_{AOB}\cdot S_{COD} = S_{AOD}\cdot S_{BOC}$. **75.** $3\sqrt{231}$ см^2. *Указание.* Найдите, пользуясь теоремой косинусов, угол между сторонами четырехугольника. **79.** 30. **85.** 60°. **87.** *Указание.* Постройте равнобедренный треугольник, основание которого равно данной стороне двенадцатиугольника, а угол при вершине треугольника равен 30°. **99.** 2. **103.** $a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **104.** $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $2R$. **105.** $2\sqrt{3}$ см. **106.** 1 : 2 : 2 : 1. **107.** $(4+2\sqrt{2})$ см. **108.** $12a^2$. *Указание.* Пусть $ABCDEF$ — данный шестиугольник, X — произвольная точка окружности, описанной около него. Тогда $XA^2 + XD^2 = XB^2 + XE^2 = XC^2 + XF^2 = 4a^2$. **110.** $72\sqrt{2}$ см^2. **112.** $4(3+2\sqrt{2})$ см^2. **113.** $18\sqrt{3}$ см^2. **119.** 20π см. **121.** 14 км/ч. **127.** 4 см. **128.** $(\pi+1)m$. **129.** $2\pi\sqrt{2}$ см. **130.** $\pi\sqrt{3}$ см. **131.** *Указание.* Сравните длину окружности и периметры многоугольников. **148.** $264\frac{1}{16}\pi$ см^2, 64π см^2. **149.** $32\sqrt{3}$ см^2. **150.** 3 : 2. **152.** $54\frac{270}{289}\pi$ см^2. **153.** $32(\pi-\sqrt{3})$ см^2. **155.** $\frac{9}{16}\pi$ см^2. **161.** (0; –1,75). **164.** (5,5; – 7,5). **165.** $D(-5;-10)$. **167.** (11;8), (–1; –12), (–5;0). **169.** $4\sqrt{13}$. **171.** $(-3\sqrt{3};-1)$ или $(3\sqrt{3};-1)$. **174.** $(x-6)^2+y^2=25$ или $(x+2)^2+y^2=25$. **178.** 1) (–3;1), $R=2\sqrt{5}$. **182.** $y=x+3$. **186.** $a=2{,}5$. **192.** $y=-3x+3$. **215.** $K(-3;2{,}5)$. **220.** $x=-5$. **237.** $\vec{c}(24;-10)$ или $\vec{c}(-24;10)$. **241.** 1) $\frac{4}{5}$; 2) $-\frac{4}{9}$. **242.** $x=-2$, $y=3$. **257.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **258.** 1) $\sqrt{41+20\sqrt{2}}$. **260.** $-\frac{4}{5}$. **262.** $6x-y=8$. **274.** 1) $3x-4y=0$; 2) $3x-4y=17$. **288.** 3) (2; –1), (1; 0), (0; 3).

291. *Указание.* Постройте прямую, симметричную одной из прямых относительно прямой, содержащей диагональ AC. **300.** *Указание.* Докажите, что $O_1O=O_2O$. **307.** $x=1$, $y=-9$. **308.** 1) $(x+2)^2+(y-3)^2=7$; 2) $(x+2)^2+(y-9)^2=7$. **309.** 1) $3x-4y=-9$; 2) $3x-4y=1$. *Указание.* Искомая и данная прямые имеют равные угловые коэффициенты. **310.** *Указание.* Постройте окружность, симметричную данной относительно данной точки. **311.** *Указание.* Докажите, что точка касания — центр симметрии окружностей. **317.** $a=-3$, $b=-2$. **319.** *Указание.* Расположите квадраты так, чтобы их центры совпадали (рис. 102). Осуществите поворот квадрата $A_1B_1C_1D_1$ вокруг точки O на такой угол, чтобы образом точки C_1 стала точка C_2, где C_2 принадлежит стороне CD.

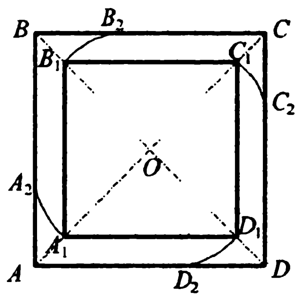


Рис. 102

320. *Указание.* Рассмотрите поворот одной из сторон угла вокруг данной точки на угол 60°. Точка пересечения полученного луча с другой стороной угла — вторая вершина искомого треугольника.

321. *Указание*. Рассмотрите поворот одной из данных окружностей на угол 90° вокруг данной точки. Точка пересечения полученной окружности со второй окружностью — одна из вершин искомого треугольника. **328.** $k = 3$. **335.** 135 см^2 или $26\frac{2}{3}$ см^2. **336.** $14\sqrt{2}$ см. **337.** 3 см. **338.** 8 см^2. **339.** *Указание*. Длина искомого отрезка равна $\frac{1}{4}$ длины данной медианы. **340.** 70,56 см^2. **341.** *Указание*. Отметьте на стороне AB данного треугольника ABC произвольную точку N и постройте квадрат $NPKM$ (рис. 103). P_1 — точка пересечения луча AP и стороны BC. Квадрат $M_1N_1P_1K_1$ — искомый. **352.** $12\sqrt{3}$ см. **353.** 8 см.

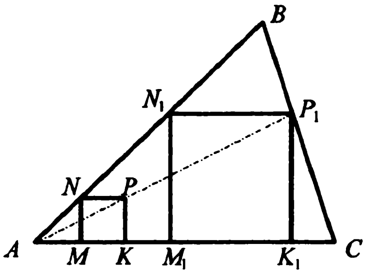


Рис. 103

Содержание

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
РАБІНОВИЧ Юхим Михайлович
ЯКІР Михайло Семенович

Збірник
задач і контрольних робіт з геометрії для 9 класу

Російською мовою

Редактор *Г. Ф. Висоцька*
Комп'ютерна верстка *О. О. Удалов*
Коректор *Т. Є. Цента*

Підписано до друку 05.05.2010. Формат 60×90/16.
Гарнітура шкільна. Папір офсетний. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 7,50. Обл.-вид. арк. 5,26.
Тираж 3000 прим. Замовлення № 697

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, 758-83-93, 719-46-80, факс: (057) 758-83-93

Віддруковано з готових діапозитивів
у друкарні ПП «Модем»
Тел. (057) 758-15-80, 758-15-90

A. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
Е. М. Рабинович
М. С. Якир

9

ГЕОМЕТРИЯ

СБОРНИК ЗАДАЧ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

ГІМНАЗІЯ